Friedrich-Schiller-Universität Jena

Casio-Stiftungsprofessur

für Didaktik der Informatik/Mathematik

Untersuchungen zur Werkzeugkompetenz der Schüler beim Einsatz des ClassPad 300 in der Sekundarstufe II

von

Carmen Rose und Marlen Geier

Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1. Vorgehensweise

Ausgehend vom Thüringer Lehrplan für Mathematik wurden repräsentative Aufgaben aus den jeweiligen Themengebieten der Klassenstufe 10 (Trigonometrie, Potenzen und Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmen und Logarithmusfunktionen, Stochastik), 11 und 12 (Zahlenfolgen und Grenzwerte, Differentialrechnung, Integralrechnung, Lineare Algebra und analytische Geometrie) ausgewählt und mit dem ClassPad Manager for Windows gelöst.[1] Die dafür benötigten Funktionen des ClassPad wurden anschließend in die drei ‚Kategorien' *unbedingt erforderlich*, *wünschenswert* und *Einzelfälle* eingeordnet. Die Beurteilung grundlegender und zusätzlicher Kompetenzen der Schüler erfolgte aus einem eher persönlichen Blickwinkel. So ließen wir vor allem unsere Erfahrungen, die wir als Studentinnen des Faches Mathematik für das Lehramt an Gymnasien bisher gesammelt hatten, mit einfließen. Als Anregung diente uns auch die Teilnahme am Proseminar ‚Computer im Mathematikunterricht', das von Prof. Dr. Fothe im Wintersemester 2005/06 geleitet wurde.

Die vorliegende Arbeit versteht sich als ein Leitfaden für Lehrer, die den ClassPad im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II einsetzen (wollen). Im Folgenden wird daher ausführlich – insbesondere am Beispiel der Klasse 10 – beschrieben, wie einzelne Aufgaben mit Hilfe des ClassPad Manager for Windows gelöst werden können. Die Aufgabensammlung diente dabei ausschließlich dem Zweck, die wesentlichen Funktionen des ClassPad für die Arbeit mit diesem Taschenrechner in der Sekundarstufe II herauszustellen und ist somit nicht als ein Handbuch zur Bedienung zu verstehen. Anschließend werden die Ergebnisse zusammenfassend dargelegt, wobei auch auf Schwierigkeiten, mit denen wir uns bei der Bearbeitung der Aufgaben der Klassenstufe 10 konfrontiert sahen, eingegangen werden soll.

Ein Schema soll dem Leser einen groben Überblick darüber geben, welche der drei Kategorien wir den einzelnen von uns genutzten Funktionen des ClassPad zugeordnet haben.

In ähnlicher Weise wurde mit ausgewählten Aufgaben für die Klassen 11 und 12 verfahren. Die Ergebnisse sind auch hier in einem Schema festgehalten.[2]

[1] Die nachfolgenden Ergebnisse beziehen sich daher ausschließlich auf diese Plattform. Minimale Abweichungen zum ClassPad 300 sind möglich, werden jedoch hier nicht mit einbezogen.

[2] Um dem Leser die Orientierung zu erleichtern, haben wir uns entschieden, die Klassifizierung der jeweiligen Funktionen des ClassPad, die für die Bearbeitung von Aufgaben der Klassen 11 und 12 erforderlich sind, getrennt von der Klassifizierung der Funktionen, welche die Aufgaben der Klasse 10 betreffen, darzustellen.

2. Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Klassenstufe 10 mit dem ClassPad Manager for Windows

2.1 Trigonometrie

<u>Trigonometrische Funktionen, Winkelmaße</u>

Die Schüler sollten bei der Nutzung des ClassPad für die Trigonometrie darauf achten, ob der Bogenmaßmodus oder der Gradmodus eingestellt ist. Mit dem ClassPad ist es möglich, Winkel vom Bogenmaß ins Gradmaß umzuwandeln und umgekehrt.

<u>Einstellung des Winkelmodus</u>

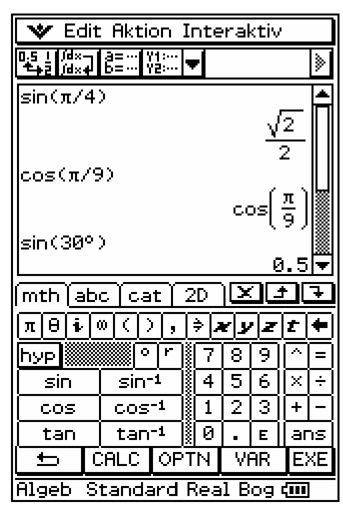
Um zum Hauptanwendungsmenü zu gelangen, müssen die Schüler auf <Main> tippen. In der Status-Leiste wird entweder Bog für Bogenmaß oder Gra für Gradmaß angezeigt. Um zwischen den Modi zu wechseln, tippt man in der Ikon-Leiste auf <Einstellungen> und wählt unter dem Menüpunkt <Grundformat> des <Setup>-Menüs den entsprechenden Winkelmodus aus.

<u>Eingabe von Winkeln</u>

<u>Beispiel</u>

Berechne die folgenden Funktionswerte.

a) sin (π/4) b) cos (π/9) c) sin 30°



Zur Eingabe von trigonometrischen Funktionen können die Schüler entweder den Trigonometrie-Tastensatz auf dem mth-Keyboard oder das cat-Keyboard (Katalog-Tastatur) verwenden. Auf letzterem befindet sich eine Buchstaben-Schaltfläche, mit welcher der Schüler die entsprechende Funktion schneller finden kann.

a) [Keyboard] [Trig] [sin] [π] [÷] [4] [)] [EXE]

b) [cos] [π] [÷] [9] [)] [EXE]

Da cos (π/9) sich nicht in einfacher Weise durch Wurzeln darstellen lässt und die Ergebnisse im Standardmodus exakt angezeigt werden, bleibt dieser Term unverändert.
Die Verwendung des Dezimalmodus ist daher sinnvoll. Um diesen einzustellen, gibt es zwei Möglichkeiten:
1. Die Schüler tippen in der Ikon-Leiste auf <Einstellungen>. Unter dem Menüpunkt <Grundformat> des <Setup>-Menüs setzen sie ein Häkchen bei Dezimalzahlen und tippen anschließend auf [Einst].
2. Die Schüler setzen den Cursor in die Ergebniszeile und tippen anschließend in der Symbolleiste auf [0.5 ↔ ½].

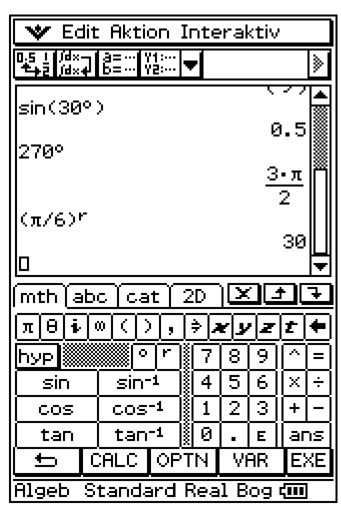
c) [sin] [3] [0] [°] [)] [EXE]
Im Bogenmaßmodus wird der Winkel in Grad mit Hilfe der Taste [°] eingegeben.
Im Gradmodus muss bei Eingabe des Winkels im Bogenmaß zusätzlich die Taste [^{r}] benutzt werden.

Beispiel Gib den Winkel 270° im Bogenmaß als Vielfaches von π an. Wie lautet der Winkel π/6 im Gradmaß?

Umwandlung von 270° ins Bogenmaß

(in der Statusleiste wird Bog angezeigt)

[2] [7] [0] [°] [EXE]



Sofern das Ergebnis in der Dezimaldarstellung angegeben ist, muss der Schüler noch mit Hilfe der Taste [0.5 ↔ ½] in der Symbolleiste das Ergebnis umwandeln.

Umwandlung von π/6 ins Gradmaß

(in der Statusleiste wird Gra angezeigt)

[(] [π] [÷] [6] [)] [^{r}] [EXE]

Analyse trigonometrischer Funktionen

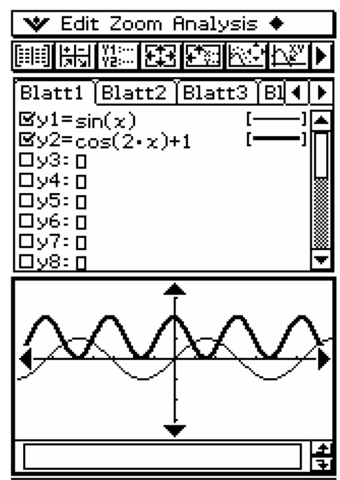
Laut Thüringer Lehrplan sollen die Schüler die Eigenschaften der Funktionen y = sin(x), y = cos(x), y = tan(x) sowie y = a sin bx und ihrer Graphen kennen.

Grafische Darstellung

Funktionen lassen sich mit dem ClassPad schnell und einfach darstellen. Dazu befindet sich im <Menü> ein <Graphik- und Tabellenmenü> .

In diesem Menü können im oberen Fenster mit Hilfe des Keyboard Funktionen eingegeben und anschließend im unteren Fenster mit graphisch dargestellt werden.

Das Betrachtungsfenster und somit der x- und y-Bereich, der graphisch dargestellt werden soll, wird mit festgelegt.

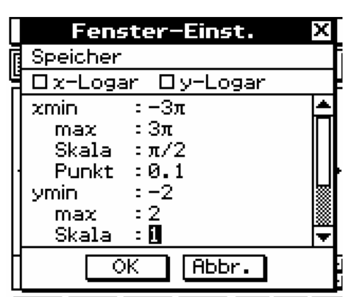


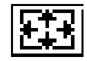
Beispiel
Zeichne die Sinuskurve im Intervall von -2π bis 2π.

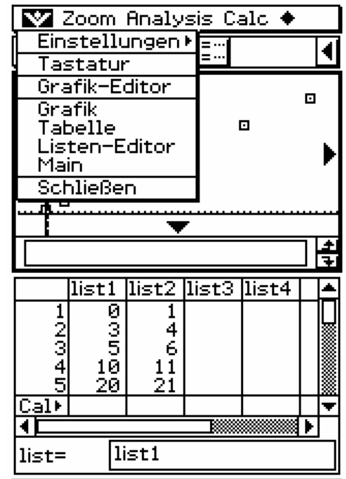
Mit dem mth-Keyboard geben die Schüler im Graphikeditorfenster hinter [y1:] [Trig] [sin] [**x**] [ )] ein und bestätigen mit [EXE].

Um eine Funktion in einem bestimmten Intervall anzeigen zu lassen, müssen sie hinter der Funktion

[OPTN] [|] [**x**] [≥] [-] [2] [π] [|] [x] [≤][2] [π] eingeben und anschließend auf das Symbol tippen.



Die Achseneinteilung, beispielsweise in einem Intervall von π/2, erfolgt unter  .



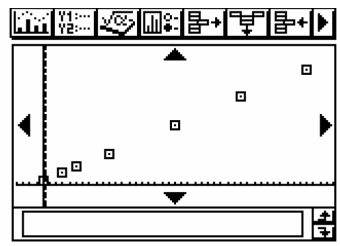
Wertetabellen

Ebenso können Funktionen in Form von Wertetabellen angegeben werden. Unter  befindet sich dazu der Listen-Editor.

Die Eingaben der einzelnen Werte müssen dabei jeweils mit [EXE] abgeschlossen werden.

Beispiel: [0] [EXE] [3] [EXE] …

Anschließend kann unter  eingegeben werden, welche Liste den x-Werten (X-List) bzw. den y-Werten (Y-List) entspricht.



Um diese Werte graphisch darzustellen, müssen die Schüler auf .
 tippen.

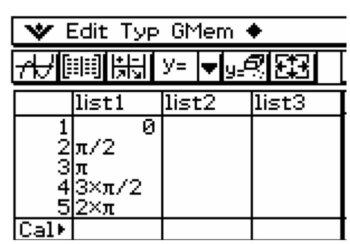
Des weiteren ist es möglich, x-Werte festzulegen, für welche die Funktionswerte einer bestimmten Funktion in einer Tabelle berechnet und angelegt werden sollen.

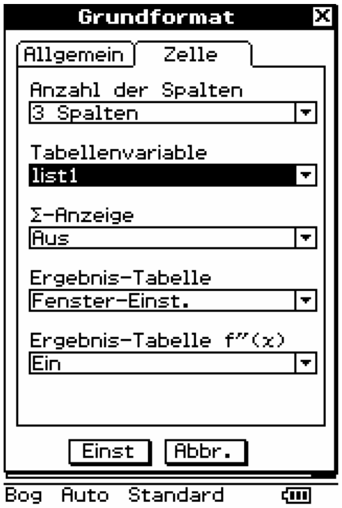
> Beispiel
>
> Stelle für die Sinusfunktion die Funktionswerte der x-Werte von 0 bis 4π im Abstand von π/2 in einer Tabelle dar. Vergleiche die Funktionswerte mit denen der Funktionen $y2(x)= 2\sin(x)$ und $y3= \frac{1}{2} \sin(x)$ anhand der Tabelle und der Graphen.

Dazu geben die Schüler die Funktion im Graphikeditorfenster mit Hilfe des Keyboard ein.

Um nun die x-Werte für die zu berechnenden Funktionswerte einzugegeben, nutzen sie erneut den Listeneditor unter  .

Die Bestätigung mit [EXE] darf dabei nicht vergessen werden.



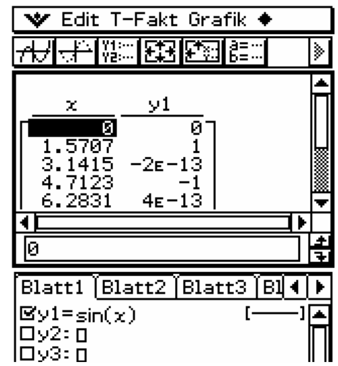


Nach Eingabe der Argumente tippen die Schüler auf <Einstellungen>→ <Setup>→<Grundformat> und auf <list1>.

Sie nutzen Einst zur Bestätigung.

Die y-Werte werden mit Hilfe von angezeigt.

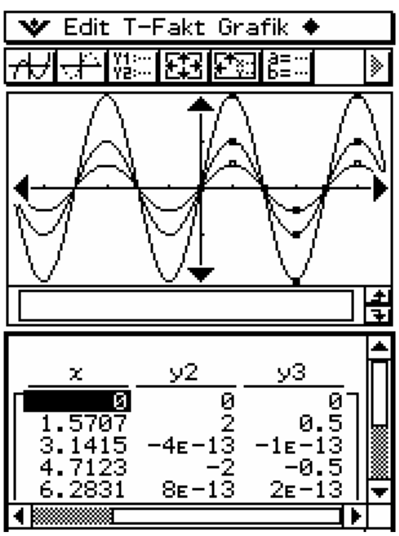
Dieses Symbol wird nach Aktivierung des Graphikeditorfensters (unter Einstellungen) oder mit dem Symbol sichtbar.



.

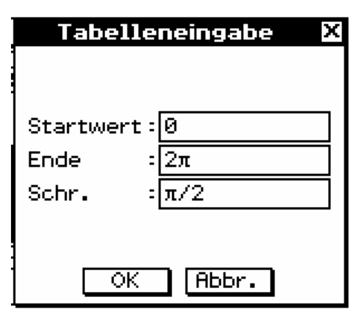
Um die Funktionswerte der drei Funktionen zu vergleichen, geben die Schüler die beiden anderen Funktionen im Graphikeditorfenster mit Hilfe des Keyboard ein.

Indem erneut auf das Symbol getippt wird, berechnet der ClassPad automatisch die Funktionswerte von y2 und y3 und das Symbol stellt diese wieder graphisch dar.



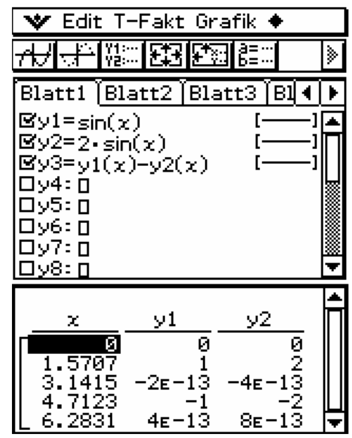
Maximale/ minimale Differenz zwischen Funktionen

Mit Hilfe der Wertetabellen kann ebenso die maximale/ minimale Differenz zwischen zwei Funktionen untersucht werden. Dazu gibt man den Bereich für die x-Werte unter ein, bestätigt diese und wählt für y3 die Differenz zwischen y1(x) und y2(x).



Um die Tabelleneingabe zu nutzen, tippt man nun unter <Einstellungen>→<Setup>→<Grundformat> auf <Tabelleneingabe>.

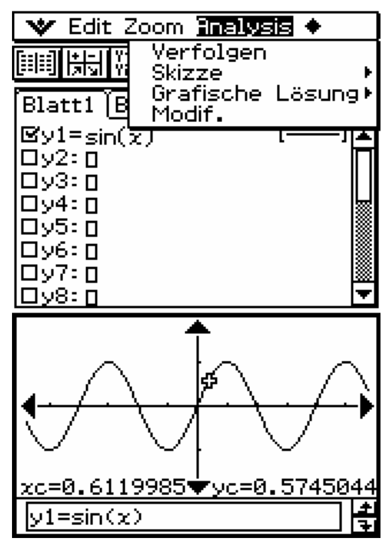
Anhand der Tabellen unter oder der Graphen kann die maximale Differenz abgelesen werden.



<u>Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen</u>

Neben der rechnerischen Bestimmung von Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, bietet sich der ClassPad hervorragend an, die Graphen dieser daraufhin zu analysieren.

Dazu können Schüler die Graphen von Funktionen mit Hilfe von <Analysis>→ <Verfolgen>, das einen blinkenden Cursor (in Form eines Kreuzes) auf dem Graphen erscheinen lässt, verfolgen. Wichtige Punkte wie beispielsweise die Nullstellen können dann automatisch abgelesen werden.



<u>Beispiel</u>

Untersuche wichtige Eigenschaften der Funktion y = cos(x).

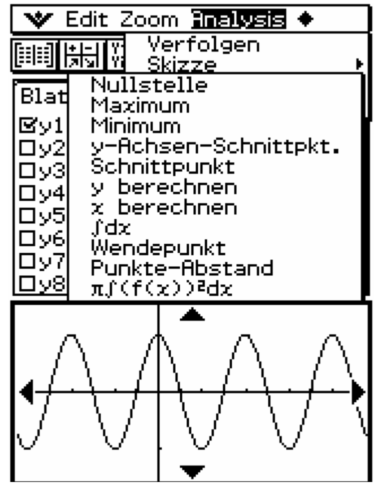
(Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, kleinste Periode, Monotonie)

Vergleiche diese anschließend mit der dir bereits bekannten Funktion y = sin(x) und bestimme graphisch die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

Definitions- und Wertebereich:

Sofern kein Intervall vorgegeben ist, scheint der Definitionsbereich $x \in \Re$ oder $-\infty < x < \infty$.
(Definitionslücken sind graphisch nicht erkennbar.)

Der Wertebereich dagegen kann sowohl mit Hilfe des Cursors durch Eingabe des <Verfolgen>-Befehls als auch mit der Funktion <Maximum/Minimum> (unter <Analysis>→ <graphische Lösung>) gefunden werden.

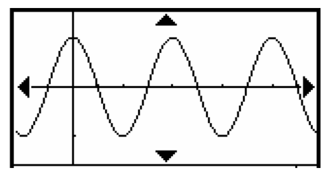


Der Cursor ► springt dabei von einem Maximum/Minimum zum nächsten.

[Analysis] [Maximum] [►]

Es ergeben sich die Maxima: $y_E = 1 + k\,2\pi$ bzw. $y_E = -1 + k\,2\pi$, $k \in Z$ → d.h. $-1 \leq y \leq 1$.

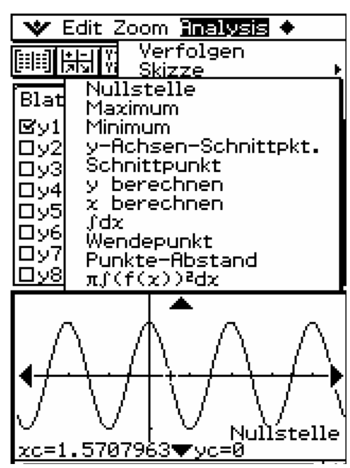
Kleinste Periode:



Anhand des Graphen kann die kleinste Periode sofort abgelesen werden. Man legt einen Startpunkt fest und schaut nun, wann sich die Werte wiederholen. Beispielsweise bei x =0 Start und bei $x = 2\pi$ wiederholt sich alles. Dabei ist die Achseneinteilung sehr hilfreich.

Die kleinste Periode ist also 2π.

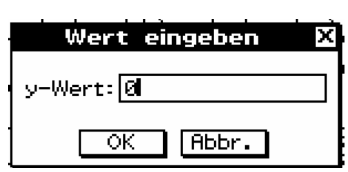
Nullstellen:



Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Nullstellen zu bestimmen.

1) Eine Möglichkeit ist die rechnerische, indem man y = 0 setzt und die goniometrische Gleichung 0 = cos(x) mit Hilfe des <Main-Menüs>  löst. Dazu nutzt man den solve-Befehl. (siehe Lösen von goniometrischen Gleichungen)

2) Des weiteren kann im <Graphik- und Tabellenmenü> der Befehl unter <Analysis>→ <graphische Lösung>→ <Nullstelle> verwendet werden. Nach Antippen von <Nullstelle> erscheint der Cursor und bewegt sich mit Hilfe des [►](bzw.[◄]) nach rechts [bzw. nach links) zur nächsten Nullstelle.

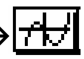


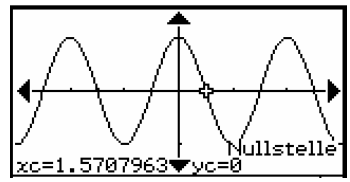
Die x-Koordinaten werden dabei unterhalb des Graphen sichtbar.

3) Und schließlich gibt es unter <graphische Lösung> auch die Möglichkeit, spezielle x-und y-Werte zu berechnen.

Damit können auch Schnittpunkte mir der y-Achse bestimmt werden.

Nach 2)

Eingabe der Funktion y1= cos(x) im <Graphikeditor> →  → <Analysis>→ <graphische Lösung>→ <Nullstellen> (Cursor erscheint)→ betrachte kleinste Periode von 0 bis 2π → Nullstelle bei

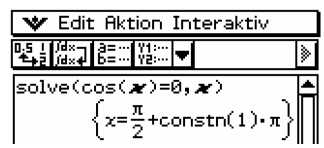


$x_1 = 1{,}57$ und $x_2 = 4{,}71$ → durch Achseneinteilung in π/2-Schritten folgt $x_1 = \pi/2$ und $x_2 = 3/2*\pi$

Die Nullstellen wiederholen sich alle π-Schritte. → Alle Nullstellen erfasst man also mit $x_N = (2k+1)* \pi/2$, wobei $k \in Z$.

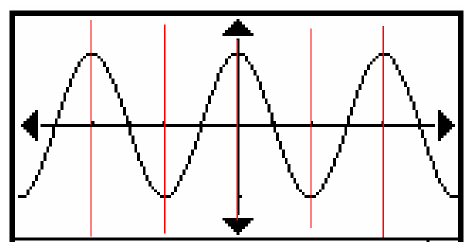
Im ClassPad wird diese Konstante mit „constn“ angegeben und wird bei mehrfachen Auftreten weiter nummeriert: constn(1), constn(2), …

Löst man also die Gleichung im Menü <Main> erscheint für die Nullstellen: $x_N = \pi/2 + \text{constn}(1)* \pi$.



Monotonie und Symmetrie:

Beide Eigenschaften sind anhand des Graphen sofort erkennbar und müssen dementsprechend nur abgelesen werden. (Achseneinteilung beachten)



1) Symmetrisch zur y-Achse → achsensymmetrisch zur y-Achse

2) Betrachten kleinste Periode von 0 bis 2π:

fallend $0 < x < \pi$ oder $0° < x < 180°$

steigend $\pi < x < 2\pi$ oder $180° < x < 360°$

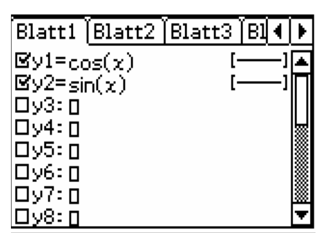
→ Schluss auf gesamten Definitionsbereich möglich

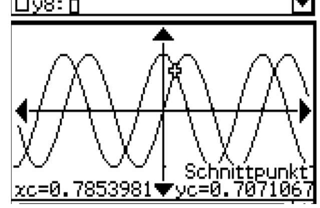
Schnittpunkte von Funktionen

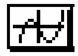
Schnitt von y1(x) = cos(x) und y2(x) = sin(x):

Zuerst muss die zweite Funktion im Graphikeditorfenster eingegeben werden.

Zum Erstellen der beiden Graphen in einem Koordinatensystem bestätigen die





Schüler beide Funktionen mit EXE, so dass ein Häkchen erscheint und benutzen , um sie graphisch darzustellen. 

Die Schnittpunkte erhält man mit Hilfe von <Analysis>→ <graphische Lösung> → <Schnittpunkt>. Der Cursor markiert den ersten Schnittpunkt und dessen x- und y- Koordinate kann nun unterhalb der Graphik abgelesen werden.

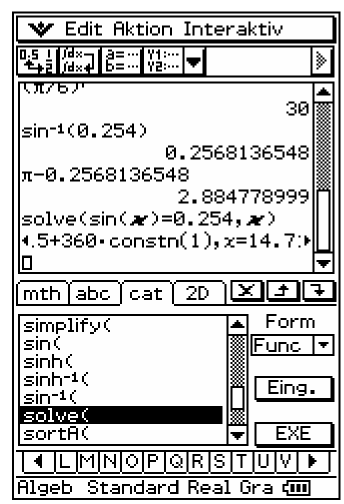
Zum nächsten Schnittpunkt kommt man mit [►] bzw.[◄].

<u>Lösen von goniometrischen Gleichungen</u>

<u>Beispiel</u> Löse die folgende Gleichung im angegebenen Intervall. sin x = 0,254 [0°; 360°]

Dazu wird Folgendes in den ClassPad eingegeben: [$\sin^{-1}$] [0] [.] [2] [5] [4] [EXE]

Da dieser bei arcsin ($\sin^{-1}$) den Wertebereich [-90°; 90°] bzw. [-π/2, π/2] (bei arccos ($\cos^{-1}$) [0; 180] bzw. [0; π]) umfasst, müssen weitere Lösungen vom Schüler selbstständig über die Quadrantenbeziehungen gefunden werden.



Danach kann die Gleichung mit dem solve-Befehl im Grad- bzw. im Bogenmaß gelöst werden. Um diesen Befehl einzugeben, gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) Die Schüler wählen in der Menüleiste [Aktion→ Gleich./Ungleich. → solve], geben dahinter die Gleichung sin x = 0,254 und nach einem Komma die Lösungsvariable ein. Je nach Aufgabenstellung kann die Lösung im Grad- bzw. Bogenmaß angegeben werden. (siehe Einstellung des Winkelmodus)

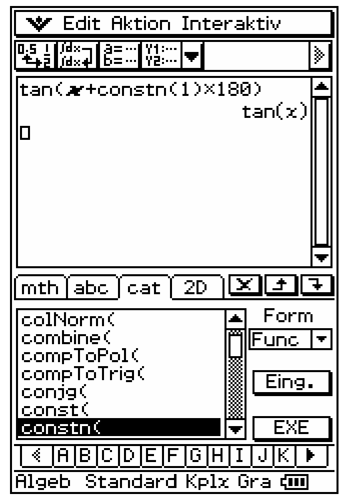
[sin] [x] [)] [=] [0] [.] [2] [5] [4] [,] [x] [)] [EXE]

2.) Der solve-Befehl kann auch über das cat-Keyboard (Katalog-Tastatur) eingegeben werden ; danach verfahren die Schüler wie bei 1.)

Um den nicht sichtbaren Teil der Lösung anzeigen zu lassen, muss auf den Pfeil am Rand der Ergebnisliste getippt werden.
Damit die Schüler mit dem Ergebnis richtig umgehen können, müssen sie wissen, dass der Ausdruck „constn (n)“ mit n ∈ {1; 2; 3; ...k} ganzzahlige Konstanten bezeichnet.

Sie können ganzzahlige Konstanten auch selbst eingeben.

> <u>Beispiel</u>
> Überprüfe, dass tan (x + k*180°) = tan x für alle k∈Z gilt.



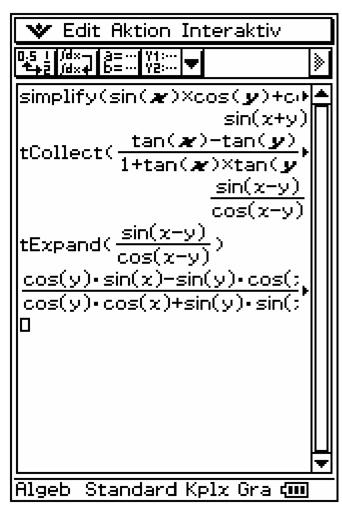
[tan] [x] [+]
Die Eingabe der ganzzahligen Konstante erfolgt über die Katalog-Tastatur. Die Schüler tippen zweimal auf „constn“ und schließen die Eingabe der Konstanten mit [1] [)] ab.
[*] [1] [8] [0] [)] [EXE] (Im Gradmaß reicht es aus, die Zahl einzugeben.)

Der ClassPad vereinfacht den Term automatisch.

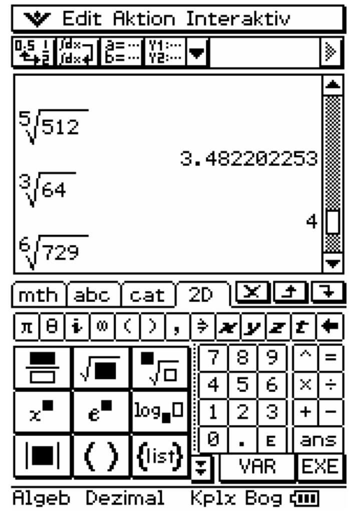
Mit dem graphikfähigen Taschenrechner ist es außerdem möglich (goniometrische) Gleichungen graphisch zu lösen. (siehe graphische Darstellung von Funktionen)

Darüber hinaus können die Befehle simplify, tExpand und tCollect zum Vereinfachen, Ausmultiplizieren und Zusammenfassen (z.B. bei der Arbeit mit Additionstheoremen) sinnvoll sein.

> <u>Beispiel</u>
> a) Vereinfache!
> sin(x) * cos(y) + cos(x) * sin(y)



2.2 Potenzen und Potenzfunktionen



> Beispiel:
>
> Welche der Wurzeln haben denselben Wert?
>
> $\sqrt[5]{512}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt[6]{729}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[5]{243}$; $\sqrt[7]{2187}$

Zur Berechnung und Umformung von Termen mit ganzen und rationalen Potenzen wird das Menü <Main> genutzt.

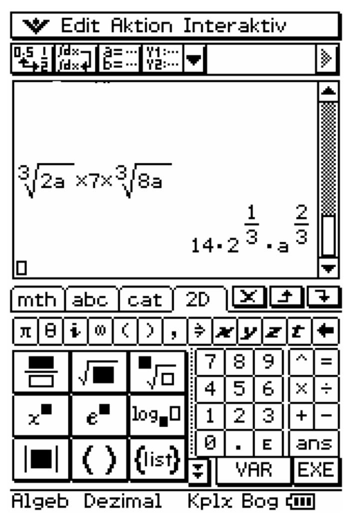
[Keyboard] [2D] [$\sqrt[\blacksquare]{\square}$] [3] [▶] [512] [EXE]

[Keyboard] [2D] [$\sqrt{\blacksquare}$] [64] [EXE] usw.

Ebenso kann mit Variablen gerechnet werden.

> Beispiel:
>
> Fasse so weit wie möglich zusammen:
>
> $\sqrt[3]{2a} \cdot 7 \cdot \sqrt[3]{8a}$

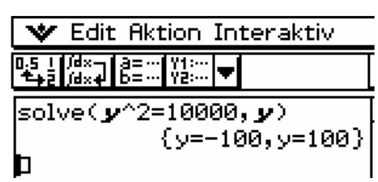
[Keyboard][2D][$\sqrt[\blacksquare]{\square}$][3][▶][2][abc][a][2D][▶][x][7][x][$\sqrt[\blacksquare]{\square}$][3][▶][8][abc][a][EXE]



> Beispiel:
>
> Löse die Gleichungen nach y auf: $y^2 = 10\,000$.

Zur Lösung von Gleichungen kann der solve-Befehl im Menü <Main> genutzt werden.

[cat] [solve(] [Eing.] [mth] [y] [^] [2] [=] [10000] [,] [y][)]
[EXE]

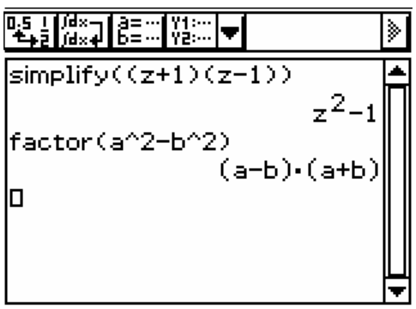


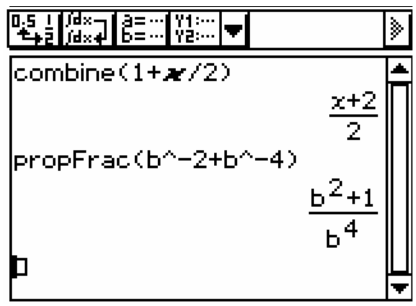
Neben diesen Befehlen, hat der ClassPad auch spezielle Funktionen, die beispielsweise binomische Formeln erkennen oder den Hauptnenner bilden. Diese befinden sich unter <Main> [cat].

Beispiele sind:

[simplify(] [combine(]

[factor(] [propFrac(]





Aufgabe:

Zeichne folgende Funktionen und untersuche sie auf ihre Eigenschaften.

a) $y1(x)= x^{0}$ b) $y4(x)= x^{-1}$

$y2(x)= x^{1}$ $y5(x)= x^{-2}$

$y3(x)= x^{2}$ $y6(x)= x^{-5}$

<Graphik- und Tabellenmenü>→ <Graphik-Editor> →

Funktionsgleichungen mit dem mth-Keyboard eingeben:

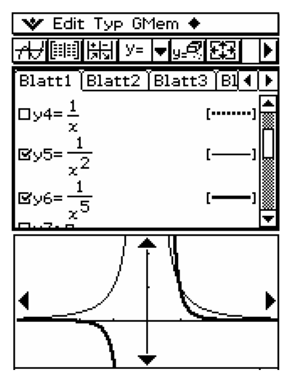
y1(x)= [x] [^] [0] [EXE]

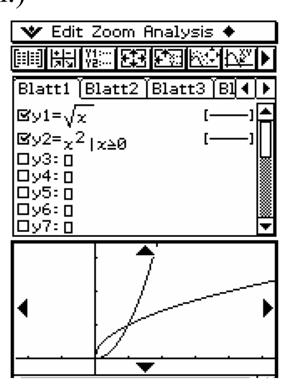
y4(x)= [x] [^] [-] [1] [EXE]

y7(x)= [x] [^] [(] [1] [:] [2] [)] [EXE] usw.

Um die Funktionen zu zeichnen, nutzen die Schüler . Nun können, wie bei den trigonometrischen Funktionen, die Eigenschaften untersucht werden. (Dabei kann auch asymptotisches Verhalten betrachtet werden.)

Auch Umkehrfunktionen können eine Rolle spielen.





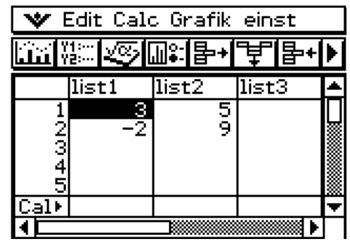
Aufgabe:

Untersuche die zwei folgenden Funktionen im ersten Quadranten. Was fällt dir auf?

$y1(x)= x^{½}$ und $y2(x)= x^{2}$

2.3 Exponentialfunktionen

> Aufgabe:
>
> Bestimme Exponentialfunktion $y = a \cdot b^x$, deren Graph durch P (3,5) und Q (-2/9) geht.

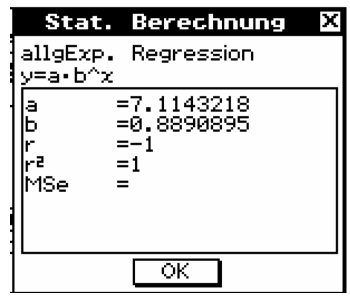


Die Funktionsgleichung lässt sich mit Hilfe einer Wertetabelle und <allgExp.Regression> bestimmen.

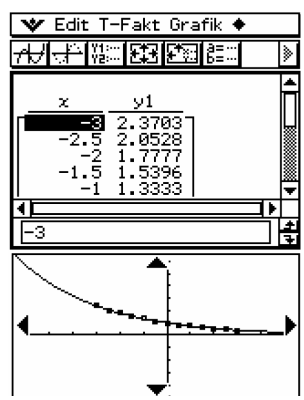
Dazu ruft man den Listen-Editor unter  auf. Nun werden die x-Koordinaten in <list1> und die y-Koordinaten in <list2> eingegeben und jeweils mit [EXE] bestätigt.

Anschließend kann unter <Calc> in der oberen Taskleiste eine <allg.Exp.Regression> aufgerufen werden. Nach Bestätigung der <list1> als x-Werte und <list2> als y-Werte, berechnet der ClassPad die fehlenden Werte der Funktionsgleichung.

→ $y = 7{,}11 \cdot 0{,}89^x$



> Aufgabe 2: Stelle eine Wertetabelle für die x-Werte im Intervall [-3;3] mit Schrittweite ½ auf. Zeichne die Graphen der Funktionen.
>
> a) $y = (\frac{3}{4})^x$ b) $y = 1{,}1^x$ c) $y = (\sqrt{3})^x$ d) $y = 3 \cdot 2^{x-2}$



Zuerst wird die Funktion im Graphikeditorfenster eingegeben und die x-Werte der zu berechnenden y-Werte im Listeneditor eingegeben. Anschließend tippen die Schüler auf <Einstellungen>→<Setup>→<Grundformat> und auf <list1>.

Die y-Werte werden mit Hilfe von  angezeigt. Dann kann der Graph gezeichnet werden usw.

Aufgabe 3: Wie verändert sich bei der Exponentialfunktion $y = a^{x}$ der Funktionswert, wenn man:

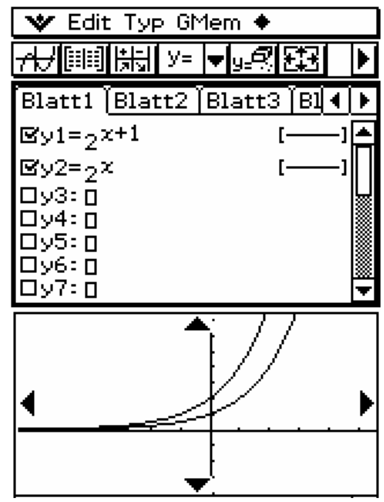
a) x um 1 vergrößert c) x mit 3 multipliziert

b) x halbiert d) x durch 3 dividiert.

Diese Aufgabe fördert entdeckendes Lernen, da keine Funktion vorgegeben ist. Schüler probieren selbstständig, was Veränderungen einzelner Variablen bewirken können.

Beispiel für a): Eingabe der Funktion $y = 2^{x}$ und $y = 2^{x+1}$.

→ anhand des Graphen können die veränderten Funktionswerte analysiert und Vermutungen aufgestellt werden → um diese zu überprüfen, ist es möglich, andere Werte für a zu betrachten.



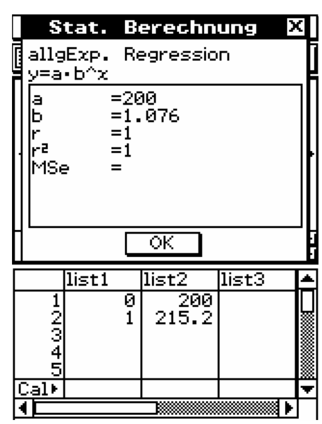
Aufgabe 4: Ein Vermögen von 200€ wird für 5 Jahre zu 7,6% angelegt. Das Vermögen wird mit Zinseszins angelegt. Wie viel erhält man nach den 5 Jahren?

Welche Funktion beschreibt diesen Vorgang?

Eine mögliche Schülerlösung:

Die Funktion hat die allgemeine Form $y = a\cdot b^{x}$. Somit sind zwei Punkte zur Bestimmung der Funktionsgleichung ausreichend: A(0/200) und B(1/215, 20).

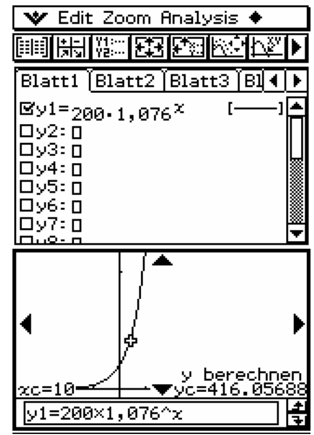
Nach Eingabe der Werte in eine Wertetabelle mit Hilfe des <Listeneditors> kann eine <allg.Exp.Regression> erfolgen, welche die fehlenden Werte der Funktionsgleichung angibt → $y = 200\cdot 1{,}076^{x}$.



Anschließend kann diese Funktion im Graphikeditorfenster eingegeben und gezeichnet werden.

Mit <Analysis>→<graphischeLösung>→ <y-berechnen> kann nun für jedes beliebige Jahr der Kontostand annähernd berechnet werden. (Sofern die Zinsen konstant bleiben.)

Zeit (Jahre)	Kapital (€)	
0	200	= 200,00
1	$200 \cdot 1{,}076^1$	= 215,20
2	$200 \cdot 1{,}076^2$	≈ 231,56
3	$200 \cdot 1{,}076^3$	≈ 249,15
4	$200 \cdot 1{,}076^4$	≈ 268,09
5	$200 \cdot 1{,}076^5$	≈ 288,46



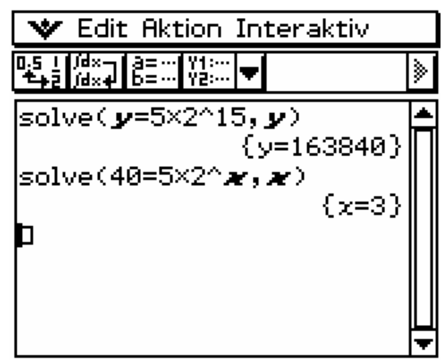
<u>Aufgabe 5</u>: Folgende Funktionsgleichung ist gegeben: $y = 5 \cdot 2^x$.

a) Wie groß ist y, wenn x = 15?

b) Wie groß ist x, wenn y = 40?

Die Aufgabe kann sowohl graphisch als auch rechnerisch gelöst werden.
Für den rechnerischen Weg nutzt man das Menü <Main> und den <solve>-Befehl.

a) [cat] [solve(] [**y**] [=] [5] [x] [2][^][15][,][**y**][)][EXE]
b) [cat] [solve(] [40] [=] [5] [x] [2][^][**x**][,][**x**][)][EXE]

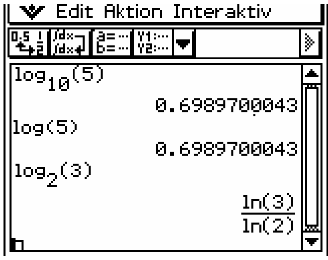


2.4 Logarithmus und Logarithmusfunktionen

<u>Logarithmus</u>

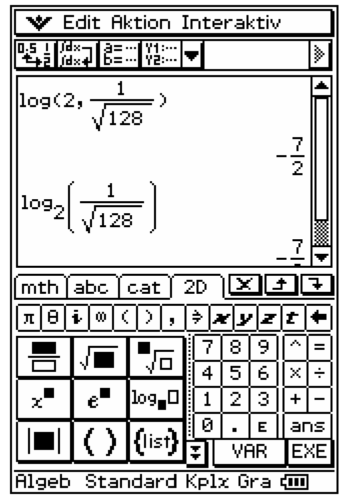
Um ein inhaltliches Verständnis des Logarithmusbegriffs zu erreichen, sollten zunächst Aufgaben ohne Taschenrechner gelöst werden.
Werden Aufgaben mit dem ClassPad gelöst, sollten die Schüler folgende Funktionen des TR beherrschen:

Der dekadische Logarithmus (üblicherweise mit lg bezeichnet) steht auf dem ClassPad als log( ) zur Verfügung.



Nebenstehende Rechnung zeigt, dass es sinnvoll ist, frühzeitig den natürlichen Logarithmus einzuführen und den Schülern die Formel $\log_a b = \lg(b)/\lg(a)$ entdecken zu lassen.

Berechnung von Logarithmen auf zwei "Wegen":

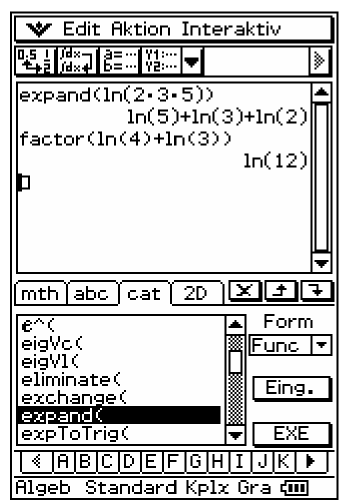


Beispiel $\log_2 (1/\sqrt{128})$

<main> - Menü

1. [mth] [log] [2] [,] [2D] [■/■] [1] [▼] [√■] [1] [2] [8] [▶] [)] [EXE]
2. [2D] [log■□] [2] [▶] [■/■] [1] [▼][√■] [1] [2] [8] [▶] [)] [EXE]

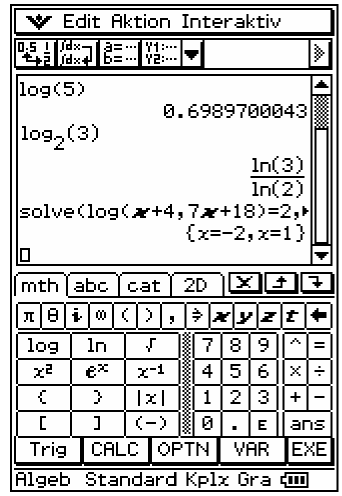
Die Logarithmengesetze mit dem ClassPad



Einen Term zerlegen mit expand

Einen Term faktorisieren mit factor

Lösen von Gleichungen



Beispiel
$\log_{x+4}(7x + 18) = 2$

mögliche Schülerlösung:

$\log_a b = \lg(b)/\lg(a)$

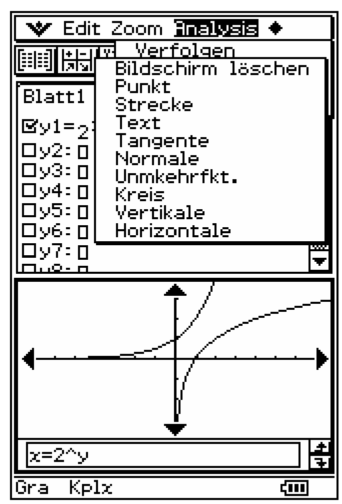
[cat] [solve] [Eing.] [mth] [log] [x] [+] [4] [,] [7] [x] [+] [1] [8] [)] [=] [2] [,] [x] [)] [EXE]

Logarithmusfunktionen

Beispiel
Skizziere die Funktion $f(x) = 2^x$ in einem geeigneten Intervall. Zeichne die Umkehrfunktion und ermittle deren Funktionsterm. Formuliere Eigenschaften!

<Graphik- und Tabellenmenü>

Mit dem 2D-Keyboard geben die Schüler im Graphikeditorfenster die Funktion $y1= 2^x$ ein. Zeichnen und Eingabe eines bestimmten Intervalls erfolgt analog zu den trig. Funktionen (siehe auch Potenz- und Exponentialfunktionen).

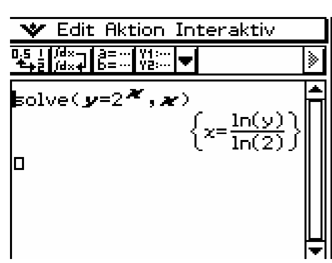


Zeichnen der Umkehrfunktion:

Analysis → Skizze → Umkehrfunktion

Durch Ausführung des solve-Befehl und mit Hilfe der Formel $\log_a b = \lg(b)/\lg(a)$ können die Schüler auf die Termdarstellung der Umkehrfunktion schließen.

Nach Umbenennung der Variablen: $y = \log_2 x$, $x > 0$

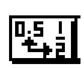


3. Zusammenfassung der Ergebnisse von Klasse 10

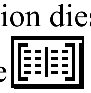
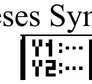
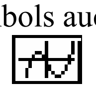
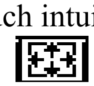
In allen Themengebieten ist für den Einsatz des ClassPad die Kenntnis der vier Tastaturen unbedingt erforderlich. Vor allem die Mathematik- (mth), 2D- und Catalog- (cat) Tastatur werden häufig gebraucht. Wir gehen jedoch davon aus, dass die Erschließung vieler Tasten, vor allem des mth- und 2D-Keyboards durch den Schüler intuitiv erfolgt, d.h. der Lehrer muss auf diese nicht explizit hinweisen. Anmerkungen sind in der Regel nur bei der Eingabe und Berechung von Winkeln nötig. Hier ist darauf zu achten, dass der Winkel in Grad im Bogenmaßmodus mit Hilfe der Taste [°] einzugeben ist. Im Gradmodus muss bei Eingabe des Winkels im Bogenmaß zusätzlich die Taste [^{r}] benutzt werden.

Die Befehle der Catalog-Tastatur sind nicht selbsterklärend. Falls diese verwendet werden, muss im Vorfeld auf jeden Fall eine Erklärung der Funktion der einzelnen Befehle erfolgen. Auch ist auf die Syntax der Eingabe einzugehen. Beim log-Befehl, der über das mth- und cat- Keyboard erreichbar ist, ist beispielsweise darauf zu achten, dass zunächst die Basis eingegeben wird und anschließend, durch ein Komma getrennt, der Potenzwert. Ähnlich verhält es sich mit den anderen Befehlen der cat-Tastatur. Um die gesuchten Befehle, Funktionen oder andere Einträge auf der Katalog-Tastatur schneller zu finden, können die Schüler eine Buchstabenschaltfläche betätigen. Dies ist für die Lösung der Aufgaben zwar nicht erforderlich, beschleunigt aber den Arbeitsprozess.

Darüber hinaus sollten die Schüler die Einstellungen des Grundformats kennen. Dazu gehören die Umstellung in Bogen- und Gradmaß, erweiterte Einstellungen wie <Dezimalzahlen> und <komplexe Zahlen>, zumindest das Deaktivieren dieses Zahlenbereichs muss bekannt sein, und das Nutzen von angelegten Wertetabellen einzelner Funktionen mit Hilfe der <Tabellenvariablen>.

Im <Hauptanwendungsmenü> sollte vor allem auf das Symbol  in der oberen Taskleiste aufmerksam gemacht werden. Es dient zur Umrechnung in Dezimalzahlen bzw. in Brüche.

Einige Schüler werden die Funktion dieses Symbols auch intuitiv erschließen.

Das Gleiche gilt für die Symbole     , die in der oberen Taskleiste des <Graphik- und Tabellenmenüs> zu finden sind. Die Kenntnis dieser sowie weiterer Symbole des genannten Menüs sind für die Untersuchung von Funktionen unbedingt erforderlich. Des Weiteren sollte der Lehrer im <Graphik- und Tabellenmenü> auf die einzelnen Menüs der

Menüleiste eingehen. Das <Edit-Menü> sowie die Funktionen <Vergrößern> und <Verkleinern> des <Zoom-Menüs> können von den Schülern intuitiv erschlossen werden.
Für das Untersuchen von Funktionen ist vor allem die Kenntnis des <Analysis-Menüs> erforderlich. Mit Hilfe dieses Menüs können u.a. Nullstellen und Schnittpunkte (unter <Grafische Lösung>) bestimmt sowie die Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion gezeichnet werden. (unter <Skizze>). Was die graphische Darstellung einer Funktion betrifft, so kann es unter Umständen vorkommen, dass die Definitionslücken einer Funktion am Graphen nicht erkennbar sind. Der Lehrer sollte dies für seinen Unterricht vorab berücksichtigen.
Bei der Bestimmung einzelner Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen kann eine Zählvariable, z.B. constn(1), auftreten. Sie wird bei mehrfachem Auftreten weiter nummeriert. Die Schüler müssen diesen Ausdruck interpretieren und Zählvariablen selbst über die Catalog-Tastatur eingeben können.
Die Schüler sollten auch über die Möglichkeiten des <Listeneditors> Bescheid wissen und damit eigenständig Wertetabellen erstellen können. Im <Listeneditor> können unter <Calc> Funktionsgleichungen (durch Regression) anhand vorgegebener Koordinaten bestimmt werden.
Für das Lösen von (goniometrischen) Gleichungen im <Hauptanwendungsmenü> ist der solve-Befehl unbedingt erforderlich. Dieser kann über die Katalog-Tastatur bzw. über <Gleichungen/Ungleichungen> des <Interaktiv-Menüs> eingegeben werden. Hinzuweisen ist hier vor allem auf die Syntax der Eingabe. Unsere Untersuchungen zeigten darüber hinaus, dass eine Einschränkung des Definitionsbereichs beim Lösen von Gleichungen nicht angegeben werden kann. Die vollständige Lösung, z.B. einer goniometrischen Gleichung, muss vom Schüler selbstständig über die Quadrantenbeziehungen gefunden werden.
Bei der Arbeit mit Logarithmen ist darauf zu achten, dass der ClassPad $\log_y x$ als ln(x)/ln(y) ausgibt. Unserer Ansicht nach ist es daher sinnvoll, nach der Einführung der Definition des Logarithmus Aufgaben zunächst ohne den Taschencomputer zu lösen, um ein inhaltliches Verständnis zu sichern. Bei der Bearbeitung von Aufgaben mit dem ClassPad sollten die Schüler den Term ln(x)/ln(y) interpretieren können. Eine frühzeitige Einführung des natürlichen Logarithmus ist sinnvoll. Auch sollte ihnen die Formel $\log_y x = \lg(x)/\lg(y)$ vermittelt werden. Der dekadische Logarithmus, üblicherweise mit lg bezeichnet, steht auf dem ClassPad als log ( ) zur Verfügung.
Wünschenswert ist die Verwendung von Befehlen wie expand, factor und simplify, die sowohl über die Catalog-Tastatur als auch über den Menüpunkt <Transformation> des <Interaktiv-

Menüs> zu erreichen sind. Mit diesen Befehlen können Terme ausmultipliziert, faktorisiert oder vereinfacht werden. Eine Anwendung der Befehle expand und factor bei der Erarbeitung der ersten beiden Logarithmengesetze durch die Schüler wäre wünschenswert. Dies kann beispielsweise mit Hilfe einer e-Activity vermittelt werden.

Das Zerlegen und Zusammenfassen von Brüchen mit dem propFrac- bzw. dem combine-Befehl, die ebenfalls über das cat-Keyboard und das <Interaktiv-Menü> des <Hauptanwendungsmenüs> einzugeben sind, ist nicht explizit Gegenstand der 10. Klasse, stellt jedoch eine wünschenswerte Kompetenz dar. Jedoch kann die Anwendung dieser Befehle je nach Schwerpunktsetzung im Unterricht auch als Einzelfall betrachtet werden, da sie für die Bearbeitung von Aufgaben in dieser Klassenstufe nicht unbedingt erforderlich sind.

Im Bereich der Trigonometrie sind für die Transformation von Termen (Additionstheoremen) die Befehle tExpand und tCollect zu nutzen. Die Umformung von Additionstheoremen und anderen Termen sollte wegen des inhaltlichen Verständnisses zunächst ohne den Taschencomputer erfolgen. Die Anwendung dieser Befehle stellt unserer Ansicht nach einen Einzelfall dar.

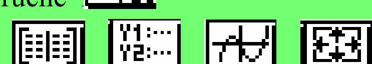
Im Bereich Stochastik sollte der Befehl für die Fakultät, den man über das mth-Keyboard erreicht, bekannt sein. Zur Berechnung von geordneten Stichproben ohne Wiederholung bzw. ungeordneten Stichproben ohne Wiederholung (Binomialkoeffizient) sollten die Schüler die Befehle nPr und nCr kennen, die sowohl auf dem mth- als auch auf dem cat-Keyboard zu finden sind. Zur Simulation von Zufallsexperimenten sind die Befehle rand und randList, die über das cat-Keyboard aufgerufen werden können, unbedingt erforderlich. Für die Berechnung von Einzelwahrscheinlichkeiten einer B(n,p)-Verteilung sollte den Schülern der Befehl BinomialPD bekannt sein. Für die Ermittlung des Wertes der Verteilungsfunktion einer B(n,p)-Verteilung an der Stelle x ist der Befehl BinomialCD erforderlich. Beide Befehle können über das cat-Keyboard (Auswahl der Kategorie <CMD> aus der Formliste) erreicht werden. Bei allen Befehlen ist auf die Eingabe-Syntax zu achten.

Für statistische Berechnungen ist die Kenntnis einiger Funktionen des <Statistik>-Menüs unerlässlich. Dazu zählen einige Schaltflächen des <Listeneditor>-Menüs, insbesondere  zum Zeichnen einer statistischen Graphik und , um das Dialogfeld „SetStatGraphs“ anzuzeigen. In diesem Dialogfeld ist es möglich den Graphik-Typ zu bestimmen. Insbesondere das Zeichnen eines Histogramms sollte den Schülern bekannt sein. Darüber hinaus sollten Daten in eine Liste eingegeben werden können (Datensätze in der Zelle <Cal> des

<Listeneditorfensters>). Die Bearbeitung des Listeninhalts (Löschen einer Zelle, Einfügen einer Zelle, Sortieren von Listendaten,...) kann durch Probieren intuitiv erschlossen werden.

Insgesamt ergibt sich folgendes Schema:

unbedingt erforderlich:

- Kenntnis der vier Tastaturen: <mth>, <abc>, <2D> und <cat>
- vor allem das Benutzen von [°] und [^{r}], !, nPr, nCr, BinomialPD, BinomialCD, rand, randList
- Einstellungen des <Grundformats>:
  * Umstellen Bogen- und Gradmaß,
  * erweitere Einstellungen wie <Dezimalzahlen> und <komplexe Zahlen> (zumindest das Deaktivieren dieses Zahlenbereiches),
  * Nutzen angelegter Wertetabellen einzelner Funktionen mit Hilfe der <Tabellenvariablen>
- Umrechnung Dezimalzahlen ←→ Brüche 
- im <Graphik- und Tabellenmenü>: 
- <Zoom-Menü>: Vergrößern, Verkleinern
- <Analysis-Menü>: <Verfolgen>, <Skizze> und <grafische Lösung>
- Interpretation und eigene Eingabe der Zählvariablen wie constn(1), constn(2), ..
- Benutzen des <Listeneditors> zur Erstellung von Wertetabellen und zur Bestimmung von Funktionsgleichungen mit Hilfe der unter <Calc> befindlichen Regressionen
- Lösen von (goniometrischen) Gleichungen im <Hauptanwendungsmenü> mit dem solve-Befehl (bei Eingabe unbedingt auf die Syntax achten)

- <Statistik-Menü>: Dialogfeld „SetStatGraphs“, Zeichnen einer statistischen Graphik (insbesondere Histogramm), Eingabe/Bearbeitung von Daten im <Listeneditor>

wünschenswert:

- expand-, factor-, simplify- Befehle
- propFrac- und combine-Befehl – je nach Schwerpunktsetzung im Unterricht auch Einzelfall

Einzelfälle:

- tExpand
- tCollect

4. Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Klassenstufen 11 und 12 mit dem ClassPad Manager for Windows

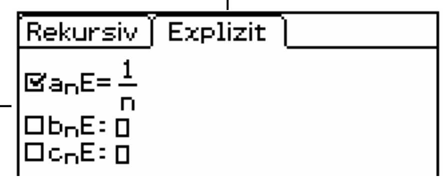
4.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte

<u>Eingabe von Zahlenfolgen & deren graphische und tabellarische Darstellung</u>

<u>Beispiel</u>

Gib folgende Zahlenfolgen ein und stelle sie tabellarisch und graphisch dar.

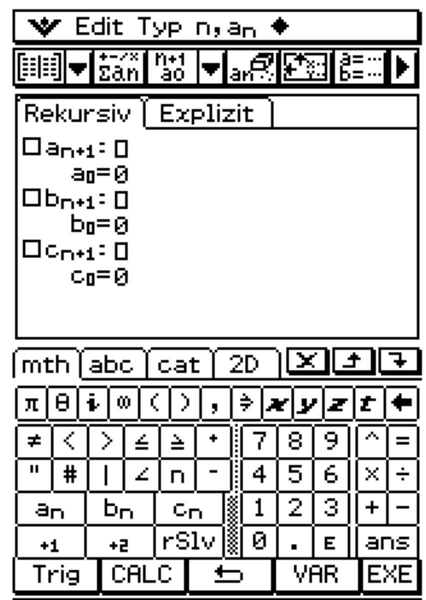
a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ b) $b_{n+1} = b_n + 1,\ b_1 = 0$

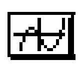


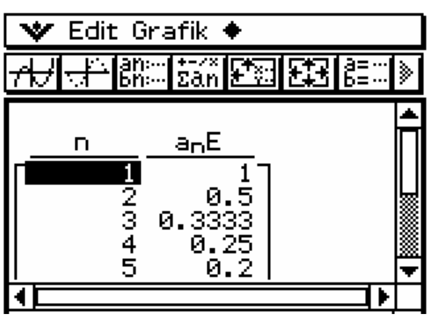
Zur Eingabe von Zahlenfolgen wird das Menü <Zahlenfolgen> genutzt. Darin können ZF sowohl rekursiv als auch explizit eingegeben werden.

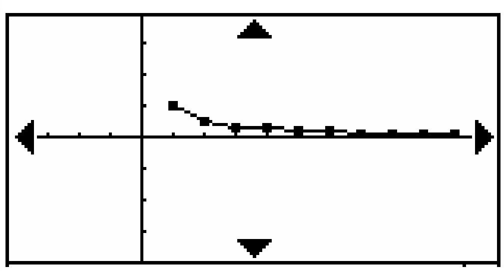
a) <Zahlenfolgen>→<explizit>→ [1/n]→ EXE

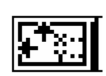
b) <rekursiv>→[mth]Tastatur→[OPTN]→[b_n+1]→ [EXE]

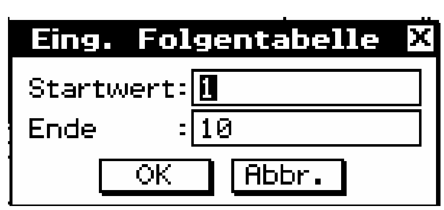


Die tabellarische Darstellung erfolgt mit dem Befehl 
und anschließend die graphische mit  .





Zur Vergrößerung der anzuzeigenden Glieder der Folge wird der Befehl  genutzt, der nach dem „Startwert“ und dem „Ende“ fragt.

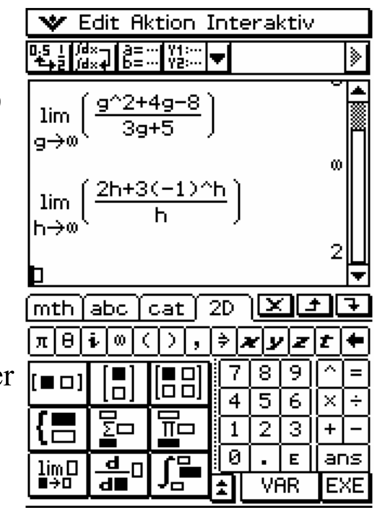


Grenzwerte von Zahlenfolgen

Beispiel

Sind folgende Zahlenfolgen konvergent (Grenzwert angeben) oder divergent?

a)$a_k = \frac{(-1)^\wedge k}{2^\wedge k}$ b) $a_g = \frac{g^2+4g-8}{3g+5}$ c) $a_h = \frac{2h+3(-1)^\wedge h}{h}$

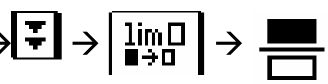


Grenzwerte können auf zwei Wegen im Menü <Main> eingegeben und berechnet werden.

1) [lim] (Bildungsvorschrift, Laufvariable, ∞)

d.h. für a) <Calc>→[lim]→ [(-1)^k/2^k] [,] [k],[∞][)] →[EXE] (Nullfolge)

2) oder direkt

d.h. für b) <2D>→  → Folge→ [EXE]

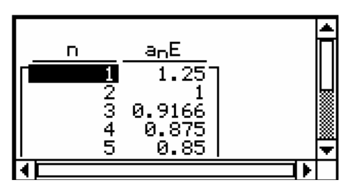
Die Grenzwertsätze für Zahlenfolgen sind mit dem ClassPad meist leicht umsetzbar, weshalb sie zwar im Unterricht thematisiert werden sollten, aber hier etwas an Bedeutung verlieren.

Schranken und Monotonie von Zahlenfolgen

Beispiel

Untersuche die Zahlenfolge $b_n = \frac{3n+2}{4n}$ auf Monotonie und gib eine obere/untere Schranke an.

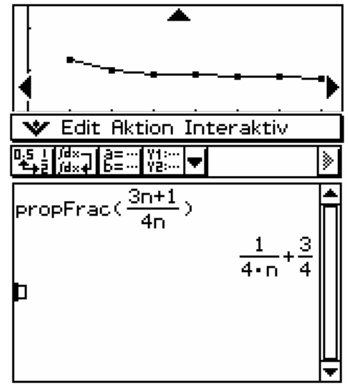
Mit Hilfe des ClassPad kann die Zahlenfolge b_n graphisch und tabellarisch dargestellt werden und hilft somit, Vermutungen bezüglich der Monotonie und oberer/ unterer Schranken aufzustellen.



Bei dieser Zahlenfolge sieht der Schüler, dass sie vermutlich monoton fallend ist, was anschließend mit $b_{n+1} < b_n$ gezeigt werden kann.

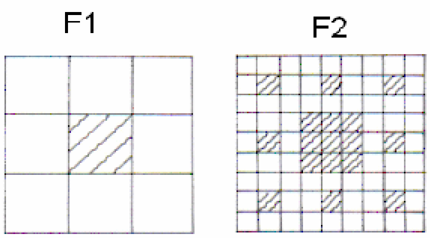
Ebenso erkennt man mit Hilfe beider Darstellungen, dass die Folge konvergent ist und kann somit eine obere und untere Schranke festlegen, die wiederum durch deren Monotonie begründet werden kann.

Des Weiteren kann auch eine Partialbruchzerlegung mit Hilfe des <propFrac>-Befehls Aufschlüsse über den Grenzwert, Schranken und Monotonie geben. → $b_n = \frac{3n+2}{4n} = \frac{1}{4n} + \frac{3}{4}$



Geometrische Zahlenfolge und Reihe

Beispiel



Eine Folge von Flächen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ entstehe wie dargestellt durch fortwährendes Herausnehmen von quadratischen Löchern aus einem Einheitsquadrat.

Wird dieser Prozess unendlich durchgeführt, so entsteht als „Endprodukt“ eine Fläche, die man den Sierpinskischen Teppich nennt.

a) Gib den Flächeninhalt der Flächen $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ an.

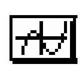
b) Bestimme den Flächeninhalt des Sierpinskischen Teppich.

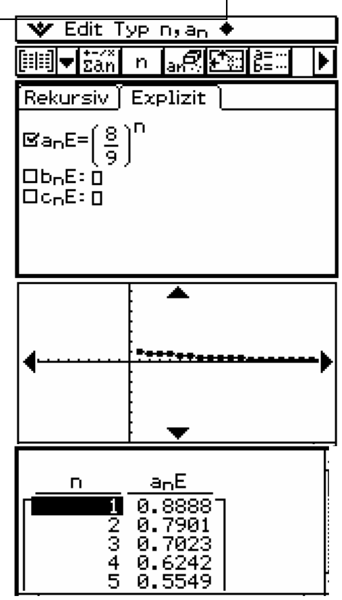
a) $F_1 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, $F_2 = 1 - (\frac{1}{9} + \frac{8}{81}) = \frac{64}{81} = \frac{8^2}{9^2}$, $F_3 = 1 - (\frac{1}{9} + \frac{8}{81} + \frac{8^2}{81}) = \frac{512}{729} = \frac{8^3}{9^3}$

$$F_n = 1-(1*\frac{1}{9}+8*\frac{1}{9^2}+8^2*\frac{1}{9^3}+\ldots+8\wedge(n-1)*\frac{1}{9\wedge n})$$

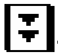
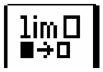
$$= 1-(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}*\frac{8}{9}+\frac{1}{9}*(\frac{8}{9})^2+\ldots+\frac{1}{9}*(\frac{8}{9})\wedge(n-1)) = (\frac{8}{9})\wedge n$$

oder $F_{n+1} = 8/9 * F_n$, $F_1 = 1$ geometrische Folge

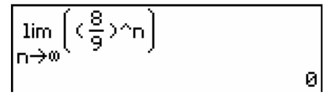
<Zahlenfolgen>→ <explizit>→[(8/9)^n]→  und 



b) Der Flächeninhalt des Teppichs kann entweder mit

<2D>→ → → [n→∞] →[($\frac{8}{9}$)^n]→ [EXE]

oder direkt mit dem Grenzwert der geometrischen Reihe berechnet werden:



$$F = \lim(1 - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{8}{9})^n) = 1 - \frac{1}{9} * \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 0$$

4.2 Differentialrechnung

<u>Definitions- und Wertebereich</u>

Analog zu trigonometrischen Funktionen:

Allerdings gilt bei einigen Funktionen besondere Vorsicht, beispielsweise bei gebrochen-rationalen Funktionen, wo Nullstellen des Nennerpolynoms der Funktion gleichzeitig Definitionslücken sind.

<u>Nullstellen bzw. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen</u>

Analog Nullstellen der trigonometrischen Funktionen:

1.) graphische Lösung mit <Analysis>→<Graphische Lösung>→<Nullstelle>

2.) Berechnung spezieller x-und y-Werte mit <Analysis>→<Graphische Lösung>→<y berechnen>

3.) rechnerische Lösung mit dem <solve>-Befehl unter <Main>

<u>Symmetrie</u>

> <u>Beispiel</u>
> Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^{13}+x^5+x$. Untersuche sie auf Symmetrie bezüglich der y-Achse und des Koordinatenursprungs.

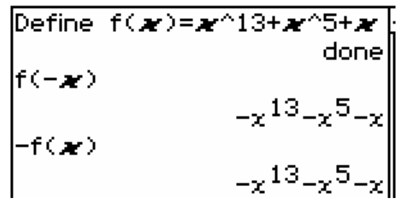
Um die Symmetrie zu untersuchen kann das Menü <Main> genutzt werden:

1.) bezüglich der y-Achse

<Main>→<cat>→[Define] [f(x)= $x^{13}+x^5+x$] [EXE]

[f(-x)] [EXE]

Da f(x) ≠ f(-x) gilt, ist der Graph von f nicht achsensymmetrisch zu y-Achse.



2.) bezüglich des Koordinatenursprungs

<Main>→<cat>→[Define] [f(x)= x^{13}+x^5+x] [EXE]

[f(-x)] [EXE]

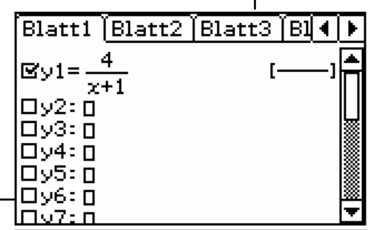
[-f(x)] [EXE]

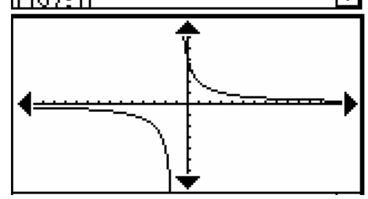
→ Da f(-x)=-f(x) gilt, ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Verhalten im Unendlichen

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f(x) = $\frac{4}{x+1}$. Fertige zunächst eine Skizze des Graphen von f an. Versuche dann herauszufinden, wie sich die Funktion f für x→ +∞ und x→ -∞ verhält.

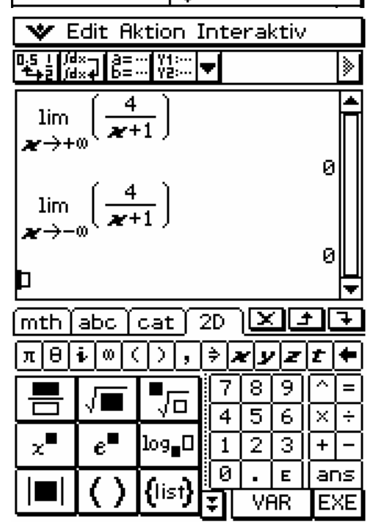




Skizze: <Graphik- und Tabellenmenü>→ Eingabe der Funktion:

[ ] [4] [▼] [**x** +1][EXE] [ ]

→ Anhand des Graphen kann vermutet werden, dass für x→ +∞ und x→ -∞ sich f(x) immer mehr der Zahl 0 nähert, d.h. der Graph nähert sich immer mehr der x-Achse: wenn x→ +∞ und x→ -∞, dann f(x) → 0



Verhalten im Unendlichen:

Um diese Vermutung nun zu überprüfen, kann (analog zu den Grenzwerten von Folgen) das Menü <Main> genutzt werden.

<Main>→<2D>→[ ] → [x] [▶] [+∞][▶][ ] [4] [▼][x+1][EXE]

(analog für x→ -∞)

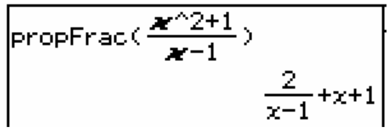
→ Die Zahl 0 ist also Grenzwert für x→ +∞ und x→ -∞.

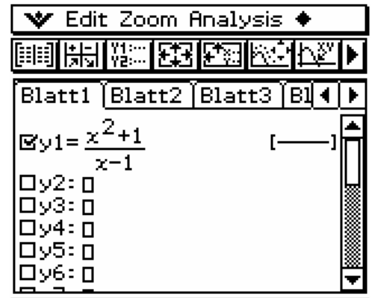
Asymptoten und Polstellen

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f(x) =. $\frac{x^2+1}{x-1}$. Bestimme mögliche Asymptoten und Polstellen.

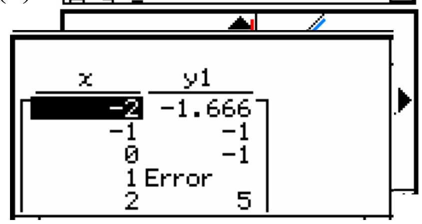
Der Graph von f(x) lässt beispielsweise sofort eine schräge Asymptote und eine Polstelle vermuten. Nach Partialbruchzerlegung mit <propFrac> stellt man fest, dass f(x) = $\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} + x + 1$

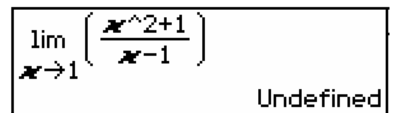




Und somit besitzt die Funktion die Gerade y= x+1 als Asymptote, da sich f(x) für x→ +∞ und x→ -∞ immer mehr x+1 nähert.

Ein Blick auf die Wertetabelle, lässt eine Definitionslücke bei x=1 vermuten. Zur Überprüfung kann erneut der Grenzwert zu Hilfe genommen werden, d.h. man berechnet den Grenzwert der Funktion für x → 1. Allerdings erscheint die Anzeige „undefined“, was bedeutet, dass der Grenzwert für x→1 nicht existiert, d.h. bei x=1 ist eine Definitionslücke.

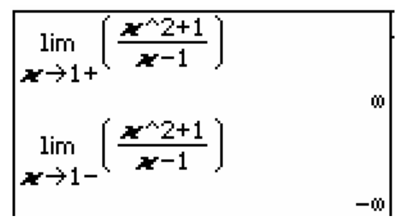




Nach Berechnung des rechts- und linksseitigen Grenzwerts mit

→[x] [▶] [1+] [▶] [ ] [x^2+1] [▼] [x-1] [EXE]

→[x] [▶] [1-] [▶] [| [x^2+1] [▼] [x-1] [EXE]



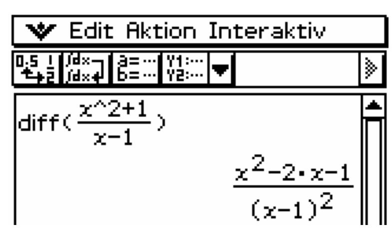
wird sichtbar, dass f(x) von -∞ nach +∞ wechselt. Solche Definitionslücken nennt man Polstellen. → f(x) besitzt bei x=1 eine Polstelle

Ableitungen

<u>Beispiel</u>

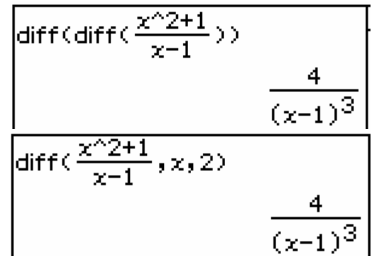
Gegeben ist die Funktion f(x) = $\frac{x^2+1}{x-1}$. Bestimme die 1. und 2. Ableitung von f(x), sowie den Wert der zweiten Ableitung bei y = 3.

Zur Berechnung der <u>1.Ableitung</u> wird der [diff]-Befehl unter <Aktion>→<Berechnung> im Menü <Main> genutzt. (Dieser befindet sich ebenfalls unter der <cat>-Tastatur>.)



<Main>→<Aktion>→<Berechnung>→[diff] [ ] [x²+1][▼][x-1)] [EXE]

Bei höheren Ableitungen ist es zwar möglich, mehrmals die Funktion [diff] zu nutzen, erscheint aber sehr umständlich. Mit Hilfe von [diff] [Funktionsterm, Variable nach der differenziert werden soll, Ordnung n der Ableitung] können höhere Ableitungen bedeutend schneller und einfacher berechnet werden.



2.Ableitung:

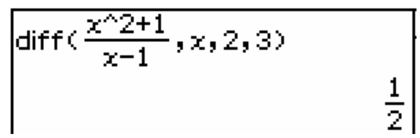
1.) [diff] [diff] [ ] [x²+1][▼][x-1))] [EXE]

oder

2.) [diff] [[ ] [x²+1][▼][x-1)] [,] [x] [,] [2] [EXE]

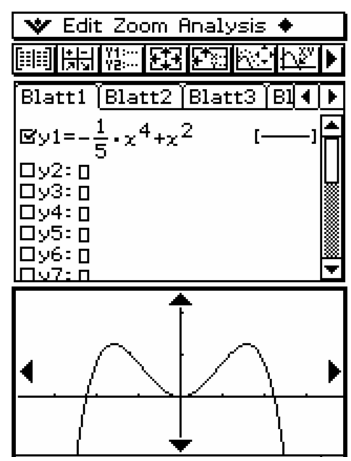
Bestimmung der 2. Ableitung von f an der Stelle y =3:

Um die n-te Ableitung einer Funktion an einer Stelle zu berechnen, muss nur zur bereits verwendeten Form [diff] [Funktionsterm, Variable nach der differenziert werden soll, Ordnung n der Ableitung, Stelle] die Stelle mit einem Komma getrennt, ergänzt werden.



[diff] [[ ] [x²+1][▼][x-1)] [,] [x] [,] [2] [,] [3] [EXE]

Absolute und lokale Extrempunkte



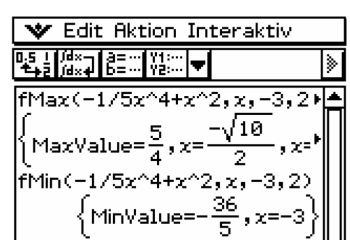
> Beispiel
>
> Bestimme die absoluten Maxima/Minima der Funktion $f(x) = -\frac{1}{5}x^4 + x^2$ auf dem Intervall [-3; 2].

Zur Bestimmung absoluter Maxima und Minima werden die Befehle [fMax] bzw. [fMin] unter <Main>→<Aktion>→<Berechnung> genutzt.

Dazu werden in die Klammer zuerst der Funktionsterm, dann die Funktionsvariable und dann die Grenzen des Intervalls eingetragen. (Funktionsterm, Funktionsvariable, linker Intervallrand, rechter Intervallrand)

absolute Maxima:

<Main>→<Aktion>→<Berechnung>→ [fMax] [-1/5x^4+x^2)] [,] [x] [,] [-3] [,] [2)] [EXE]

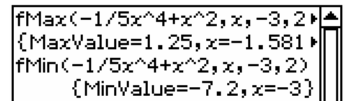


absolute Minima:

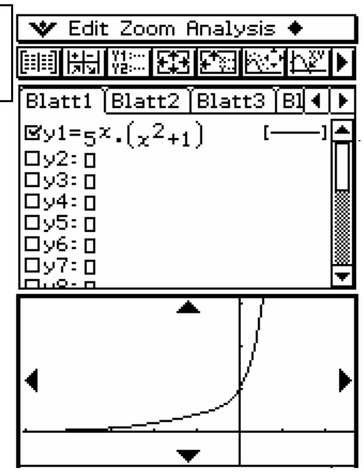
<Main>→<Aktion>→<Berechnung>→ [fMin] [-1/5x^4+x^2)] [,] [x] [,] [-3] [,] [2)] [EXE]

→ d.h. das Maximum von f auf dem Intervall [-3; 2] beträgt $\frac{5}{4}$ und wird angenommen bei $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ und bei $x = +\frac{\sqrt{10}}{2}$

(Dezimaldarstellung mit Hilfe von [0.5 ⇆ 1/2]) → das Minimum von f auf dem Intervall [-3; 2] beträgt $-\frac{36}{5}$ und wird bei x = -3 angenommen, also am Rand des Intervalls.



> Beispiel
> Bestimme die absoluten Maxima/Minima der Funktion $f(x) = 5^x(x^2+1)$ auf $\Re$.

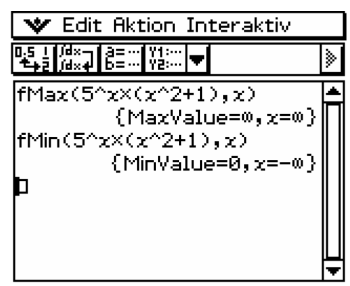


Ist kein spezielles Intervall vorgegeben, können die Intervallränder bei der Berechnung weggelassen werden.

absolute Maxima:

<Main>→<Aktion>→<Berechnung>→ [fMax] [5^x·(x²+1)] [,] [x)] [EXE]

Die Anzeige „MaxValue=∞“ bedeutet, dass die Funktion f(x) nach oben nicht beschränkt ist. Außerdem deutet der Ausdruck x = ∞ an, dass für f(x)→∞, x → ∞ gilt, d.h. ein absolutes Maximum existiert nicht.



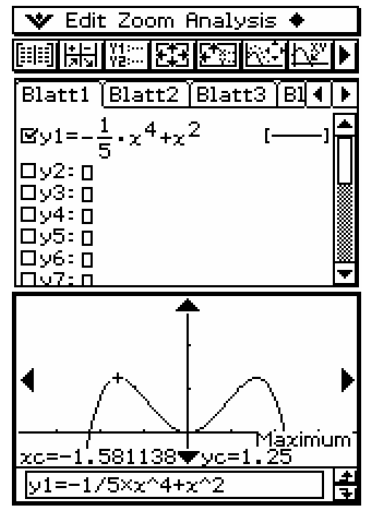
absolute Minima:

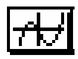
<Main>→<Aktion>→<Berechnung>→ [fMin] [5^x·(x²+1)] [,] [x)] [EXE]

→ „MinValue=0“ bedeutet, dass das Infimum 0 ist und „x = -∞“ zeigt an, dass f(x) → 0 für x→-∞ gilt. → Ein absolutes Minimum existiert ebenso nicht. .

> Beispiel
> Bestimme die lokalen Maxima/Minima der Funktion $f(x) = -\frac{1}{5}x^4+x^2$.

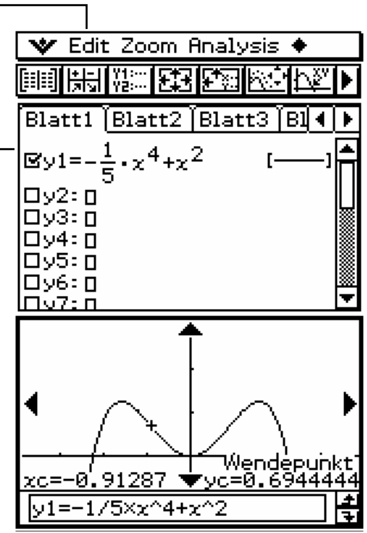
Zur Bestimmung der lokalen Extrempunkte kann der Befehl <graphische Lösung>→<Maximum>/<Minimum> genutzt werden.



Dazu gibt man im <Graphik- und Tabellenmenü> die Funktionsgleichung ein und nutzt anschließend  , um den Graphen darzustellen.
Das Maximum/Minimum kann nun unter <Analysis>→<graphische Lösung>→<Maximum> bzw. <Minimum> angezeigt werden.
Dabei wird zunächst der kleinste x-Wert im dargestellten Bereich angezeigt. Mit dem Cursor kann nun mit [◄] und [►] nach links bzw. nach rechts das nächste Maximum/Minimum angezeigt werden.
Zum Auffinden weiterer Extrempunkte sollte der dargestellte Bereich vergrößert werden. Jedoch kann es sein, dass bei sehr vielen Extrempunkten und zu großem Bereich nicht alle gefunden werden können.
Zur exakten Angabe der Werte kann ebenfalls das in der letzten Aufgabe erklärte Verfahren genutzt werden, indem ein sehr kleines Intervall um dieses Extremum gewählt wird, so dass es gleichzeitig absolutes Extremum ist.

Wendepunkte

Beispiel
Bestimme die Wendepunkte der Funktion $f(x) = -\frac{1}{5}x^4+x^2$.

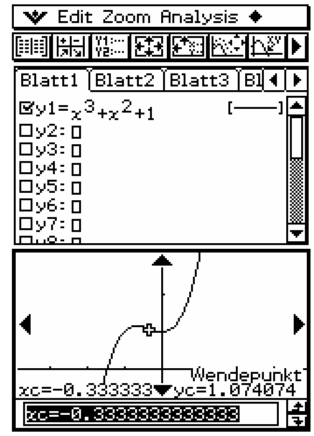


Wendepunkte können analog zum Verfahren der Bestimmung der lokalen Extrema bestimmt werden.
Graphen der Funktion bestimmen→ <Analysis>→<graphische Lösung>→ <Wendepunkt>
Der Cursor zeigt die Koordinaten des Wendepunkts unter dem Graphikfenster an.

Tangenten an Funktionsgraphen

Beispiel
Bestimme die Wendetangente für die Funktion $f(x) = x^3+x^2+1$.

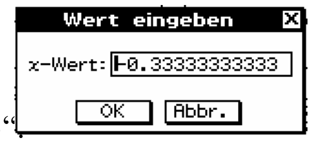
1.) Graphische Lösung



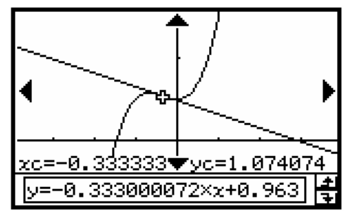
Nach der graphischen Darstellung der Funktion, wird der Wendepunkt mit <Analysis>→<graphische Lösung>→<Wendepunkt> bestimmt.

Beim Aufleuchten des Cursors, tippt man auf den angezeigten x-Wert im Graphikfenster bis er im Meldungsfeld darunter angezeigt wird. Anschließend markieren die Schüler ihn und tippen zum Speichern auf .

Zum Zeichnen der Tangente wählt man nun in der Menüleiste <Analysis>→<Skizze>→<Tangente>. Im nächsten Schritt wird auf die Graphik getippt, um dort den Cursor erneut blinken zu lassen und dann auf [(], um das Dialogfeld zu öffnen.

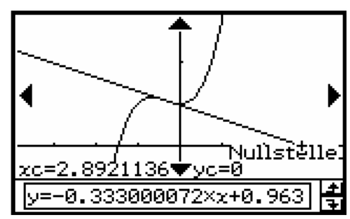


Mit wird nun das Gespeicherte aufgerufen. Allerdings erscheint „x_c = -0,3333“. Aus diesem Grund ist es nötig, „x_c =“ noch zu entfernen und dann tippt man auf „Ok“. Mit dem Befehl [EXE] erscheint schließlich die Wendetangente.



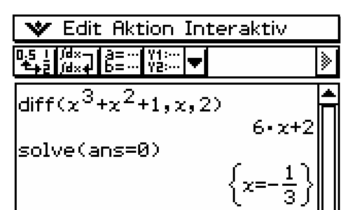
Die Funktionsgleichung dieser Tangente kann wiederum darunter im Meldungsfeld abgelesen werden. Sie lautet näherungsweise: $y = -\frac{1}{3}x+0,96$.

Um beispielsweise nun die Nullstelle der Wendetangente zu bestimmen, wählt man <Analysis>→<graphische Lösung>→<Nullstelle>. Nach Tippen auf die Graphik erscheint ein Quadrat, welches mit [▼] auf die Tangente wechselt. Anschließend reicht ein bloßes [EXE] und die Nullstelle erscheint.



2.) Rechnerische Lösung

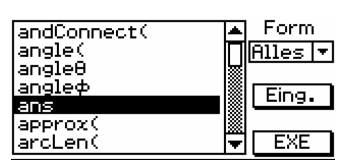
Eine rechnerische Lösung ist mithilfe der 2. Ableitung möglich, da der Wendepunkt bekanntlich die Nullstelle der 2. Ableitung ist.



Dazu bestimmt man im Menü <Main> die 2. Ableitung mit:
<Aktion>→<Berechnung>→[diff] [x^3+x²+1] [,] [x] [,] [2] [EXE].

Anschließend soll die Lösung der Gleichung 6x+2=0 bestimmt werden. Dazu wird der [solve]-Befehl in der <cat>Tastatur genutzt.

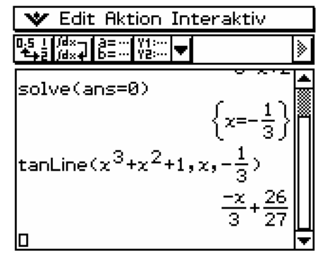
<cat>→ [solve(] →<cat>→ in <form> auf <alles> wechseln→ [ans] [=0)] [EXE]



→Der Wendepunkt befindet sich bei $x = -\frac{1}{3}$.

Zur Bestimmung der Tangente an den Graphen einer Funktion, wird der Befehl [tanLine] genutzt.

→ tanLine (Funktionsterm, Funktionsvariable, Stelle)

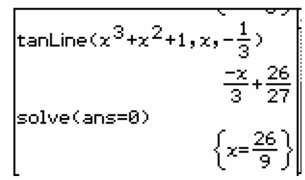


Um nun die Wendetangente an den Graphen von $f(x) = x^3+x^2+1$ zu bestimmen, wird Folgendes eingetippt:

<Aktion>→<Berechnung>→[tanLine(] [x^3+x^2+1] [,] [x] [,] [$-\frac{1}{3}$)] [EXE]

Die Tangente lautet $y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{27}$.

(Die Nullstelle der Tangente berechnet sich mit [solve(] [ans=0)] [EXE].)



4.3 Anwendungen der Differentialrechnung

<u>Rekonstruktion einer Funktion</u>

<u>Beispiel</u>

Bestimme eine ganzrationale Funktion f dritten Grades,

1) dessen Graph im Ursprung die x-Achse berührt und

2) dessen Tangente in P(-3/0) parallel zur Geraden mit der Gleichung y=6x ist.

Funktionsgleichung: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Aus den geforderten Eigenschaften ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und den Unbekannten a, b, c und d, nach denen aufgelöst werden soll:

I $f(0) = 0$
II $f`(0) = 0$ Tangente
III $f(-3) = 0$
IV $f`(-3) = 6$ Tangente parallel zu $y = 6x$

<u>Funktion definieren mit [define]-Befehl</u>:

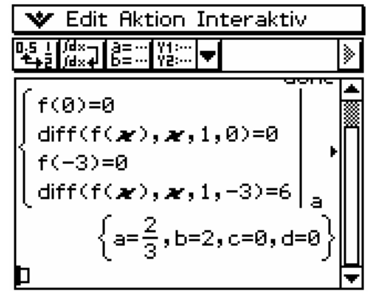
Um die Unbekannten zu bestimmen, wird zuerst die Funktion dritten Grades definiert:

<cat>-Tastatur→<Form> auf <alles>→ [Define]→ <abc>-Tastatur→ f→ <mth>-Tastatur→ [(**x**)= ax^3 + bx^2 + cx + d] [EXE]

Gleichungssystem lösen:

<2D>→  →

1.Zeile <abc> [f] <mth> [(0)=0] [▼]



2.Zeile <Aktion><Berechnung>[diff(]<abc>[f]<mth>[(x),x,1,0=0][EXE] [▼]

3.Zeile <abc> [f] <mth> [(-3)=0] [EXE] [▼]

4.Zeile <Aktion> <Berechnung> [diff(] <abc> [f] <mth> [(x),x,1,-3=6] [EXE] [►]

Rechts (hinter dem Strich) können nun die Variablen, nach denen das Gleichungssystem aufgelöst werden soll, mit Komma getrennt, aufgelistet werden.

<abc> [a, b, c, d] [EXE]

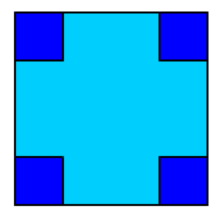
Die Lösung lautet a = $\frac{2}{3}$, b=2, c=0 und d=0.

(Natürlich kann nun auch eine Probe erfolgen.)

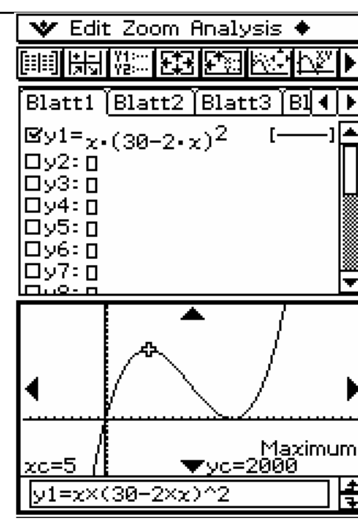
Extremwertaufgaben

Beispiel

Zum Bau einer offenen Schachtel soll aus einem quadratischen Stück Karton mit der Seitenlänge 30 cm ein oben offener Quader mit quadratischer Grundfläche entstehen. Dazu soll an jeder Ecke des Kartons ein quadratisches Stück der Länge x ausgeschnitten werden, so dass die verbleibenden Kanten als Seitenflächen nach oben geknickt werden können.



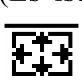
Wie muss x gewählt werden, dass das Volumen maximal wird?



Die Grundfläche ist ein Quadrat der Länge 30- 2x. Die Höhe beträgt x cm.

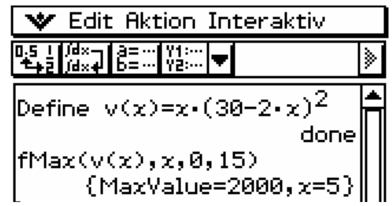
→ Das Volumen ist dementsprechend V(x)=x (30-2x)². (x > 0 und x < 15 muss aber gelten.)

graphische Lösung:

<Graphik- und Tabellenmenü> → Funktionsgleichung eingeben und Graph darstellen (Es ist wichtig, das richtige Darstellungsfenster einzugeben. Dies erfolgt mit  und <Verkleinern>/ <Vergrößern> unter <Zoom>.)

Um nun das Maximum des Volumens zu finden, wählt man den größtmöglichen Bereich der Funktion aus und bestimmt es mit <Analysis>→<graphische Lösung>→ <Maximum>.
Das Maximum liegt somit scheinbar bei x = 5cm. Das Volumen beträgt dann genau 2000 cm³.

rechnerische Lösung:



Diese Lösungsmethode erfolgt über die Berechnung des absoluten Maximums auf dem Intervall [0; 15]:
1.) Definieren der Volumenfunktion:
<cat>→ [Define] <abc> [v] <mth> [(x)=x (30-2x)^2][EXE]
2.) Bestimmen des absoluten Maximums der Funktion:
<Aktion>→<Berechnung>→[fMax(] <abc>[v] <mth> [(x), x, 0,15)] [EXE]
→ Das Maximum beträgt x = 5cm und das maximale Volumen somit 2000cm³.

4.4 Integralrechnung

Berechnung unbestimmter, bestimmter und uneigentlicher Integrale

Mit dem ClassPad können die Schüler unbestimmte, bestimmte und uneigentliche Integrale berechnen, auch dann, wenn der Intergrand mehrere Variablen bzw. Parameter enthält. Mit Hilfe von Integralen lassen sich neben der Bestimmung von Flächeninhalten auch Volumina von Rotationskörpern bestimmen.

Beispiele

Berechne die folgenden Integrale:

1) $\int \cos(ax + b)\,dx$ 2) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+y^2}\,dy$ 3) $\int_{0,001}^{1} \sqrt{x^3}\sin\frac{1}{x}\,dx$ 4) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$

Syntax für $\int f(x)\,dx$: $\int$ (Funktionsterm, Integrationsvariable) [EXE]
Werden Komma und Integrationsvariable weggelassen, wird automatisch x als Integrationsvariable gewählt.

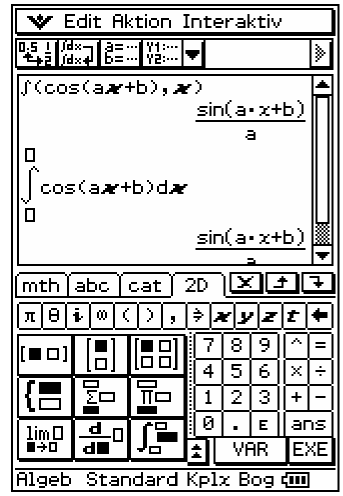
zu Integral 1

Um den ∫ - Befehl einzugeben:

1) in der Menüleiste des <Main>-Menüs: Aktion → Berechnung → ∫ ODER

über mth-Tastatur → calc ODER

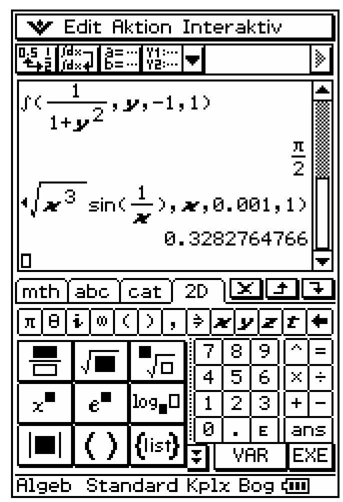
direkte Eingabe über 2D-Tastatur mit dem Eintrag für das bestimmte Integral (um das unbestimmte Integral zu erhalten, keine Grenzen festlegen)



2) dahinter unter Verwendung der mth-Tastatur Integranden eingeben und nach einem Komma die Variable x → [)], [EXE]

Sofern Funktion in Klammern gesetzt ist, ist dx hinter der Funktion nicht unbedingt nötig.

Bei der Berechnung von unbestimmten Integralen verzichtet ClassPad auf die Integrationskonstante und gibt eine der Stammfunktionen des Integranden an.



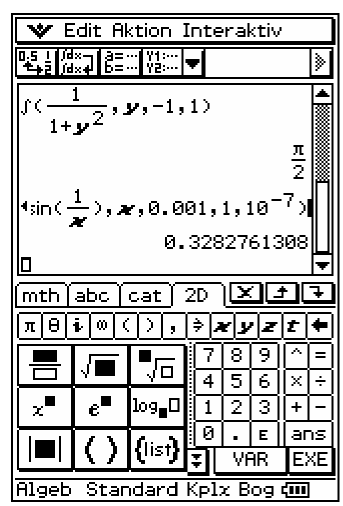
zu Integral 2

1) Eingabe des ∫ - Befehls analog zu Integral 1

2) Eingabe des Funktionsterms über die 2D-Tastatur, nach einem Komma jeweils die Variable y, die untere Integrationsgrenze –1 und die obere Integrationsgrenze 1, [)], [EXE]

zu Integral 3

Eingabe des ∫ - Befehls und Integranden analog zur Eingabe von Integral 1 und 2 (für Eingabe des Integranden mth- und 2D-Tastatur nutzen)



ClassPad kann offensichtlich keine Stammfunktion zum Integranden angeben. Die Berechnung des Integrals erfolgt numerisch mit einer Fehlerschranke von 10^{-5}.

Soll die Berechnung mit einer anderen Fehlerschranke, z.B. 10^{-7} erfolgen, muss diese nach einem Komma hinter der oberen Integrationsgrenze eingegeben werden: [,] [1] [EXP] [-] [7] [EXE].

<u>zu Integral 4</u>

Die Berechnung von uneigentlichen Integralen mit Hilfe des ClassPad erfolgt analog zu der der anderen Integrale: Die untere und die obere Integrationsgrenze werden auch hier nach der Variablen, jeweils durch ein Komma abgetrennt, eingegeben.

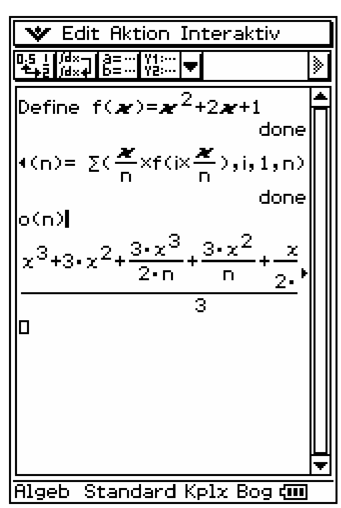
Mit dem ClassPad ist das Bestimmen von Funktionstermen für Stammfunktionen schnell erledigt. Er kann deshalb genutzt werden, um die Integrationsregeln zu entdecken.

Einführung des bestimmten Integrals über die Berechnung von Ober- und Untersummen zur Flächenapproximation

<u>Beispiel</u>

Approximiere die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x) = x^2 + 2x + 1$ auf dem Intervall [0; x] mit x > 0 durch Rechtecke. Teile dazu das Interval [0; x] in n gleich große Teilintervalle und bestimme die Obersumme *o(n)* und die Untersumme u(n) der Rechteckflächeninhalte in Abhängigkeit von n. Ermittle die Grenzwerte von *o(n)* und *u(n)* für $n \to \infty$, um den Flächeninhalt von A zu erhalten.

1) cat-Tastatur: unter Form <cmd> wählen und danach zweimal auf <Define> tippen, um den Befehl einzugeben



2) dahinter die Funktionsgleichung mit Hilfe der mth- und abc-Tastatur eingeben [EXE]

<u>Definieren der Obersumme *o(n)* mit dem Define-Befehl</u>

Für die Obersumme gilt (da f im Intervall [0; x] monoton steigend):

$o(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{n} \cdot f(i \cdot \frac{x}{n})$

1) Eingabe des Define-Befehls (siehe oben)

2) dahinter die Funktionsgleichung $o(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{n} \cdot f(i \cdot \frac{x}{n})$ eingeben (mit Hilfe der abc-Tastatur)

Eingabe des Summensymbols z.B. unter dem <Aktionsmenü> ➔ <Berechnung> ➔ ∑ , dahinter der zu summierende Term und danach, jeweils nach einem Komma, der Summenindex i, der Startwert 1 des Indexes und der Endwert n des Indexes:

[x] [÷] [n] [*] [f] [(] [i] [*] [x] [÷] [n] [)] [,] [i] [,] [1] [,] [n] [)] [EXE]

Berechnen der Obersumme

durch [o] [(] [n] [)] [EXE]

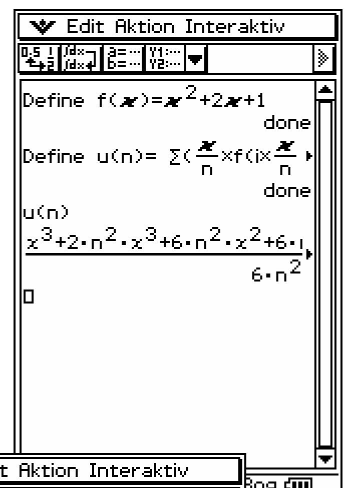
$$o(n) = \frac{1}{3}(x^3 + 3 \cdot x^2 + \frac{3 \cdot x^3}{2 \cdot n} + \frac{3 \cdot x^2}{n} + \frac{x^3}{2 \cdot n^2} + 3 \cdot x)$$

Definieren der Untersumme *u(n)* mit dem Define-Befehl

Da f im Intervall [0; x] monoton steigend, gilt für die Untersumme:

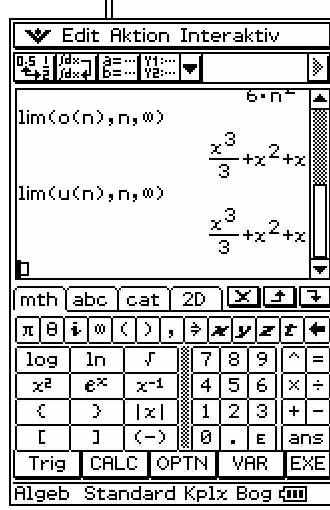
$$u(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x}{n} \cdot f(i \cdot \frac{x}{n})$$

Die Untersumme wird analog zur Obersumme definiert. Um die Arbeit zu erleichtern, kann o in der Eingabezeile (siehe Definieren der Obersumme) durch u und der Start- und Endwert des Indexes ersetzt werden. [EXE]



Berechnen der Untersumme

Durch [u] [(] [n] [)] [EXE]



Bestimmen der Grenzwerte von *o(n)* und *u(n)* für *n*→ ∞

1) Eingabe des lim-Befehls z.B. über das <Aktionsmenü> ➔ Berechnung ➔ lim

2) dahinter Funktionsterm o(n) bzw. u(n) und jeweils nach einem Komma die Funktionsvariable n und

(unter Verwendung der mth-Tastatur) den Wert ∞ eingeben

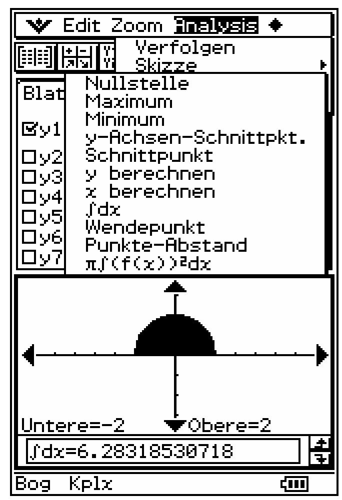
Da Ober- und Untersumme gegen den gleichen Grenzwert streben, ist auch $A = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x$.

Die Berechnungen können erneut mit veränderten Funktionen ausgeführt werden. Dazu muss der Funktionsterm nur durch den neuen Term ersetzt und [EXE] gedrückt werden. ClassPad führt dann die Berechnung der Zeile, in der sich der Cursor befindet, sowie alle folgenden Berechnungen erneut aus.

<u>Berechnung bestimmter Integrale durch Verwenden einer graphischen Näherung</u>

<u>Beispiel</u>

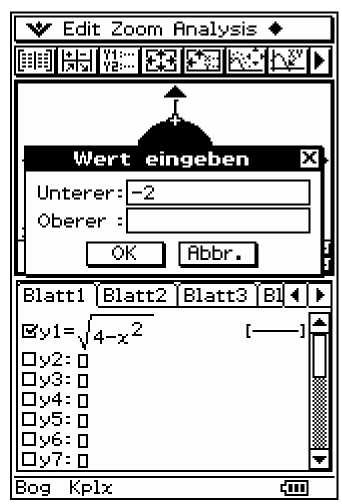
Bestimme den Wert des Integrals $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$!



1) im Graphik-und Tabellenmenü die Funktion y1= $\sqrt{4 - x^2}$ eingeben und mit Hilfe von zeichnen.

2) unter Analysis → Graphische Lösung → ∫dx kann die untere und obere Grenze des Integrals festgelegt werden, indem man nach Auswahl von ∫dx die 1 drückt und die Werte direkt eingibt oder indem man das Kreuz, das im Graphen erscheint, zu den gewünschten Integrationsgrenzen bewegt.

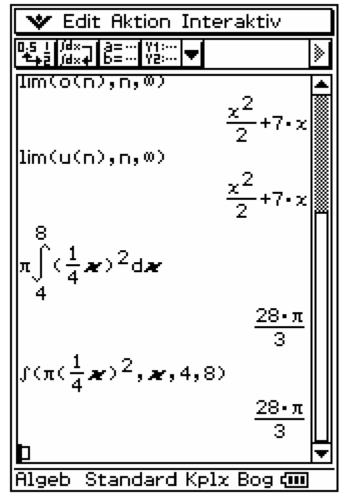
ClassPad berechnet einen Näherungswert für das Integral, welcher am unteren Ende des Bildschirms ablesbar ist. Die zugehörige Fläche wird markiert.



Volumen eines Körpers

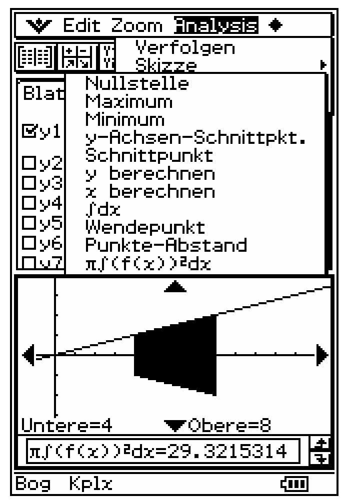
Beispiel

Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph der Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x$ auf dem Intervall [4; 8] um die x-Achse rotiert.



1) Eingabe des Define-Befehls: siehe Eingabe unbestimmter, bestimmter und uneigentlicher Integrale
2) Eingabe des Terms π (Funktionsterm)^2 und jeweils nach einem Komma die Integrationsvariable, untere Integrationsgrenze, obere Integrationsgrenze [)] [EXE]

graphische Näherungslösung



1) im Graphik- und Tabellenmenü die Funktion eingeben und zeichnen
2) unter Analysis → Graphische Lösung → $\pi\int(f(x))^2dx$ kann die untere und obere Grenze des Integrals festgelegt werden, indem man nach Auswahl von $\pi\int(f(x))^2dx$ die 1 drückt und die Werte direkt eingibt oder indem man das Kreuz, das im Graphen erscheint, zu den gewünschten Integrationsgrenzen bewegt.
ClassPad berechnet einen Näherungswert für das Volumen, welches am unteren Ende des Bildschirms ablesbar ist. Das zugehörige Volumen wird markiert.

4.5 Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Lösen von linearen Gleichungssystemen

Mit dem ClassPad lassen sich lineare Gleichungssysteme lösen, auch dann, wenn die Koeffizienten Parameter enthalten und unendlich viele Lösungen existieren.

Beispiel

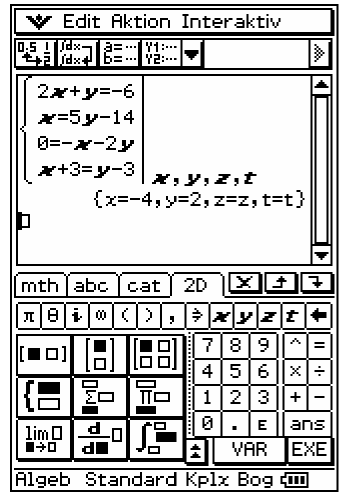
Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems:

2x + y = –6

x = 5y – 14

0 = –x – 2y

x + 3 = y – 3



1. Variante

Lösung mit dem 2D-solve-Befehl

1) um den 2D-solve-Befehl einzugeben, die Taste im zweiten Teil der 2D-Tastatur verwenden; enthält das Gleichungssystem n Gleichungen, (n-1)-mal auf tippen

2) Cursor in die entsprechende Zeile bewegen und Gleichungen eingeben

3) nach Drücken von [▶] unten, hinter dem senkrechten Strich, die zu lösenden Variablen (durch Kommata getrennt) eingeben [EXE]

Hinweis: Bei einem Gleichungssystem, das mehr Gleichungen als Unbekannte enthält, müssen so viele Variablen hinzugefügt werden, dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt.

2. Variante

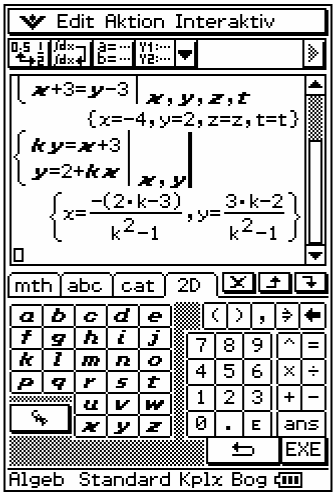
Lösen mit dem solve-Befehl

Eingabe des solve-Befehls unter Aktion → Gleich./Ungl. → solve ODER über die cat-Tastatur (siehe Klasse 10)

Beispiel

Bestimme die Lösung des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter k. Existiert eine Lösung für k = –2?

ky = x + 3
y = 2 + kx

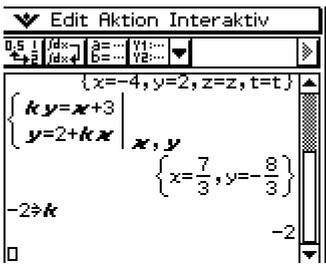


Lösung in Abhängigkeit von k

1) Eingabe des 2D-solve-Befehls

2) Einfügen der Gleichungen und der zu lösenden Variablen (Variablen-Tastensatz verfügbar unter [var] des mth- bzw. 2D-Keyboards

3) [EXE]



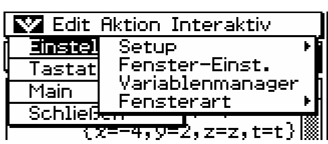
Lösung für k = -2

1) Zuweisen des Zahlenwertes –2 zu k mit der Taste [⇒]: [-] [2] [⇒] [k] [EXE]

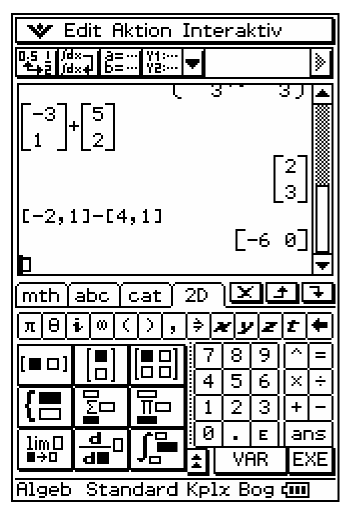
2) in die Eingabezeile des Gleichungssystems tippen, erneut [EXE] ausführen

ClassPad zeigt entweder die Lösung oder no solution an.

Hinweis: Um die Lösung des Gleichungssystems wieder allgemein in Abhängigkeit von k anzeigen zu lassen, muss die Variable k im Variablenmanager gelöscht werden



Vektorrechnung

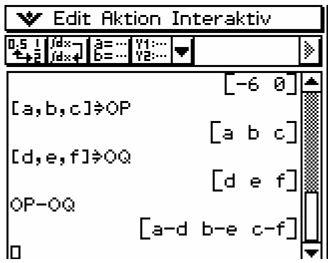


Addition und Subtraktion zweier oder mehrerer Vektoren

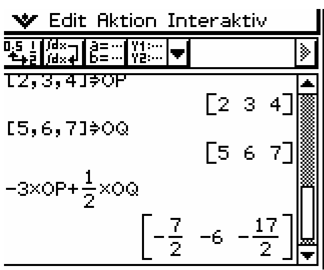
Eingabe von Vektoren entweder über die 2D-Tastatur mit Hilfe von [■□] für einen Zeilenvektor oder [■/□] für einen Spaltenvektor ODER über die mth-Tastatur mit Hilfe der Tasten [und] (Zahlen durch Komma trennen!)

Vektoren benennen

Mit Hilfe des Zuweisungspfeils



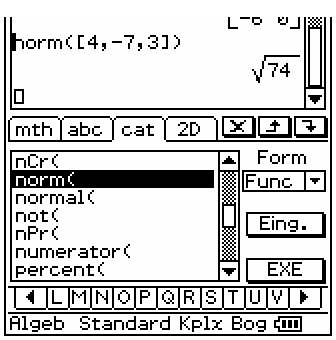
Vervielfachen von Vektoren mit einer reellen Zahl α



Betrag eines Vektors

Beispiel 1 Berechne den Abstand a des Punktes P(4/-7/3) vom Koordinatenursprung!

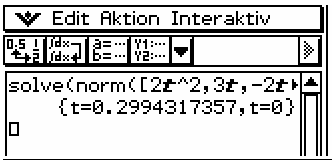
Die Länge eines Vektors wird mit Hilfe der Funktion norm (auf der cat-Tastatur) berechnet.



Beispiel 2

Für welche reellen Werte t ist ($2t^2$ / 3t / -2t + 1) ein Einheitsvektor?

Eingabe: [solve] [(] [norm] [(] [[] [Vektor] []] [)] [=] [1] [,] [t] [)] [EXE]



Skalarprodukt

Das Skalarprodukt lässt sich mit dem Befehl dotP (Vektor 1, Vektor 2), der auf der cat-Tastatur zu finden ist, ermitteln.

Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt wird mit dem Befehl crossP (Vektor 1, Vektor 2) (auf der cat-Tastatur) berechnet.

Beispiel

Gegeben sind die beiden Vektoren a = (-3 / 1 / 2) und b = (2 / -3 / -1). Zeige mit dem ClassPad, dass das Kreuzprodukt $a \times b$ sowohl auf a als auch auf b senkrecht steht!

Es muss gelten: $(a \times b) \cdot a = 0$ und $(a \times b) \cdot b = 0$

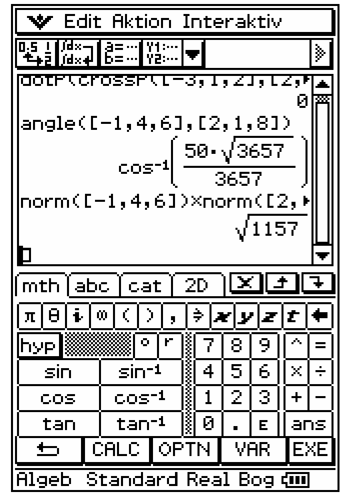
Eingabe: dotP(crossP([-3, 1, 2], [2, -3, -1]), [-3, 1, 2]) [EXE]

Winkel zwischen zwei Vektoren

Den Winkel zwischen zwei Vektoren ermittelt man mit dem Befehl angle (Vektor 1, Vektor 2) (über die cat-Tastatur).

Beispiel

Bestimme die Fläche des Parallelogramms mit 3 Eckpunkten, der Punkte P(1 / 0/ -1), Q(0 / 4 / 5) und R(3/ 1/ 7).



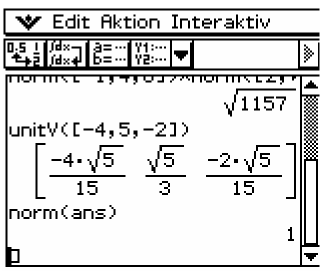
PQ = (-1/ 4/ 6) PR = (2 /1 / 8)

1) Berechnung des Winkels zwischen PQ und PR durch Befehl angle

2) Berechnung der Fläche durch norm([-1, 4, 6]) ×norm([2, 1, 8]) × sin (ans))

Einheitsvektoren bestimmen

Mit Hilfe des Befehls unitV (Vektor)

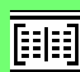
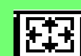


Die Befehle dotP, crossP, angle, unitV, norm sind auch alle über das Interaktivmenü → Vektor zu erreichen

5. Zusammenfassung der Ergebnisse von Klasse 11 und 12

Es ergibt sich folgendes Schema für die Werkzeugkompetenz der Schüler in Klasse 11 und 12: (Kenntnisse der Funktionen aus Klasse 10 werden vorausgesetzt)

unbedingt erforderlich:

- Kenntnisse der vier Tastaturen
- Menü <Zahlenfolgen>→<Explizit> und <Rekursiv>
- Eingabe mit [OPTN]→[a_n],[b_n],[c_n]
- graphische/tabellarische Darstellung mit , , , 
- Grenzwertbestimmung und –interpretation von Zahlenfolgen und Funktionen mit <Calc>→  (inbegriffen rechts- und linksseitige Grenzwerte berechnen)
- Berechnen von Nullstellen von Funktionen und deren Ableitungen mit dem solve-Befehl
- Graphisches Bestimmen der Eigenschaften von Funktionen mit <Analysis>→<Graphische Lösung>, <Verfolgen> und <Skizze>
- Berechnung von Ableitungen bis n-Ordnung mit dem diff-Befehl, sowie Ableitungen von Funktionen an bestimmten Stellen bestimmen können
- Absolute und lokale Extrema bestimmen und interpretieren: auf bestimmten Intervallen und auf ganz R
  graphisch: über <graphische Lösung>
  rechnerisch: über <Main>, <Berechnung>, <fMax/fMin>
- Wendepunkte bestimmen: über <graphische Lösung> oder Nullstellen der 2.Ableitung
- Tangenten in vorgegebenen Punkten einer Funktion bestimmen
  graphisch: über <Analysis>→ <Skizze>
  rechnerisch: über tanLine-Befehl unter <Aktion>, <Berechnung>
- Rekonstruktion von Funktionen: Funktionsgleichungen definieren und anschließendes Lösen linearer Gleichungssysteme
- Extremwertaufgaben:
  graphisch: über <graphische Lösung> <Maxiumum/ Minimum>
  rechnerisch: über Bestimmung absoluter Maxima/ Minima
- ∫ - Befehl in <main> eingeben können: über 2D-Tastatur oder über Aktion → Berechnung →∫ oder über mth-Tastatur → calc (Syntax beachten)
- Lösen von linearen Gleichungssystemen mit dem 2D-solve-Befehl
- Zuweisungspfeil nutzen können
- Variablen im Variablenmanager löschen können
- Vektoren über die mth-Tastatur oder 2D-Tastatur (mit Hilfe von  oder ) eingeben können

- Länge eines Vektors mit dem norm-Befehl bestimmen können: über cat-Tastatur oder Interaktivmenü → Vektor

<u>**wünschenswert**</u>:

- definieren von Funktionen mit dem define-Befehl
- selbstgewählte Fehlerschranke bei numerischer Berechnung eines bestimmten Integrals eingeben können
- Berechnung bestimmter Integrale durch Verwenden einer graphischen Näherung: <Graphik- und Tabellenmenü>: Analysis → Graphische Lösung → ∫dx
- graphische Näherungslösung für das Volumen eines Körpers bestimmen: <Graphik- und Tabellenmenü>: Analysis → Graphische Lösung → $\pi \int (f(x))^2\, dx$
- Skalarprodukt mit dotP (Vektor 1, Vektor 2), Kreuzprodukt mit crossP (Vektor 1, Vektor 2)

<u>**Einzelfälle**</u>:

- propFrac-Befehl zur Partialbruchzerlegung
- Winkel zwischen 2 Vektoren mit dem Befehl angle berechnen
- Einheitsvektoren mit unitV berechnen

6. Quellenangaben

Gjone,Gunnar/Andersen, Tor: Form und Zahl. Eine Einführung zum Einsatz des ClassPad 300 im Mathematikunterricht, Casio, 2004.

Der Einsatz des TI-89 in der Jahrgangsstufe 10 an Thüringer Gymnasien, Heft des Thillm, 2003.

Der Einsatz des TI-89 in der Jahrgangsstufe 11 an Thüringer Gymnasien, Heft des Thillm, 2004.

Arbeitsblätter zum Casio ClassPad 300 unter
URL: http://www.cornelsen-teachweb.de/co/casio (15.03.2006)