Vektoren

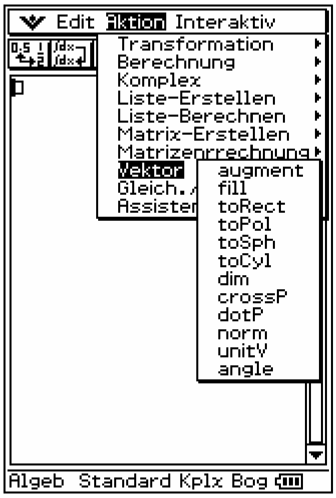
Vektoren werden beim ClassPad durch $1 \times n$ –Matrizen und $n \times 1$ –Matrizen dargestellt. Zusätzlich zu den Operationen, die mit Matrizen möglich sind wie Addition, Subtraktion und Multiplikation mit Zahlen, lassen sich Skalar- und Vektorprodukte, Beträge und normierte Vektoren sowie Winkel zwischen Vektoren bestimmen.
In der analytischen Geometrie ist dies hilfreich bei der Ermittlung von Punkten, Längen, Winkeln und Abständen von geometrischen Objekten. Darüber hinaus ermöglicht es auch die einfache Bestimmung des Flächeninhaltes bei Parallelogrammen und Dreiecken sowie des Volumens bei einem Spat und bei vielen Pyramiden.
Um Gleichungen mit Vektoren zu lösen, ist es erforderlich, ein Gleichungssystem mit den Gleichungen für die einzelnen Komponenten aufzustellen.

Beispiel

Berechnen Sie die Beträge der Ortsvektoren der Punkte $P(3;\ 4\ ;\ 5)$ und $Q(-1;\ 6;\ -2)$.

E sei die Ebene mit dem Stützpunkt P und den Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie einen Normalenvektor von E und den Abstand des Punktes Q von der Ebene.

Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Eingabe von Vektoren

In der Ikon-Leiste tippen Sie auf <Main>, um zum Hauptanwendungs-Menü zu gelangen.

Enthalten Vektoren beim ClassPad kein Winkelsymbol, werden sie als Vektoren eines Raumes mit kartesischen Koordinatensystem interpretiert.
Es können sowohl Spaltenvektoren als auch Zeilenvektoren verwendet werden. $n \times 1$ –Matrizen stellen Spaltenvektoren, $1 \times n$ –Matrizen Zeilenvektoren dar.

Bei der Eingabe von Spaltenvektoren empfiehlt sich die Verwendung der 2D-Tastatur.

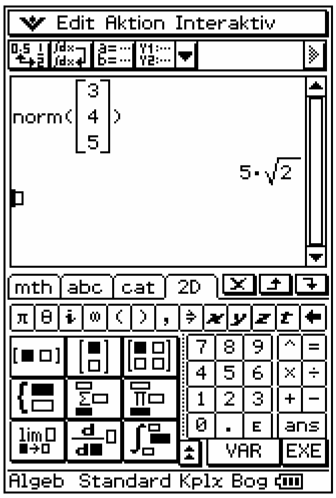
Eingabe des Ortsvektors von P als Spaltenvektor und Ermittlung des Betrages

Um den Betrag eines Vektors zu bestimmen, wählen Sie in der Menüleiste [Aktion ▸ Vektor ▸ norm].

Dahinter geben Sie den Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Spaltenvektor ein.

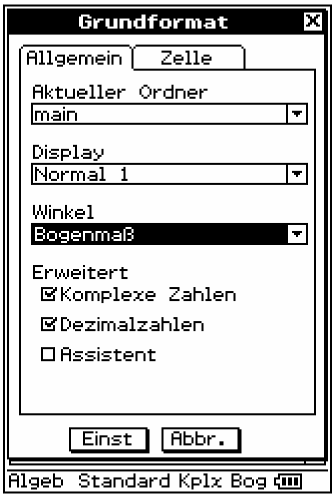
[Keyboard] 2D [3] [▼] [4] [5] [▶] [ )] [EXE]

Der Ortsvektor von P besitzt den Betrag $|\,\vec{p}\,| = 5 \cdot \sqrt{2}$.



Autor: Torsten Gebauer

Wechsel in den Dezimalmodus

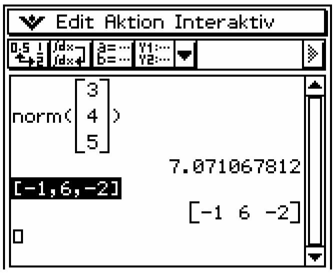


Um die Ergebnisse generell in Dezimaldarstellung anzeigen zu lassen, tippen Sie in der Ikon-Leiste auf <Settings>, wählen in der Menüleiste [Setup ▸ Grundformat] und tippen in der Rubrik Dezimalzahlen auf das Kontrollkästchen, sodass ein Häkchen erscheint. Anschließend tippen Sie auf Einst.

Wenn Sie nun in die erste Eingabezeile tippen und [EXE] drücken, erhalten Sie für den Ortsvektor von P den Betrag $|\vec{p}| \approx 7{,}071$.

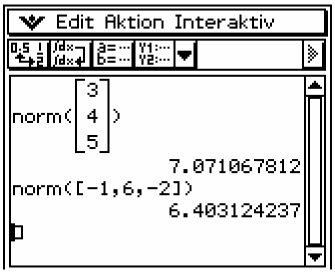
Verwendet man bei der Eingabe eines Zeilenvektors als $1 \times n$ –Matrix nicht die 2D-Tastatur, sondern eckige Klammern, kann man die Zeilenbegrenzung weglassen, und die Vektorkomponenten durch Kommata getrennt in einem Paar eckiger Klammern eingeben.

Eingabe des Ortsvektors von Q als Zeilenvektor und Ermittlung des Betrages



Sie geben den Ortsvektor $\begin{pmatrix}-1 & 6 & -2\end{pmatrix}$ von Q als Zeilenvektor in eckigen Klammern ein.

mth [[(–)][1][,][6][,][(–)][2]] [EXE]



Nun markieren Sie den Zeilenvektor in der Eingabezeile und wählen zur Bestimmung des Betrages in der Menüleiste [Interaktiv ▸ Vektor ▸ norm].

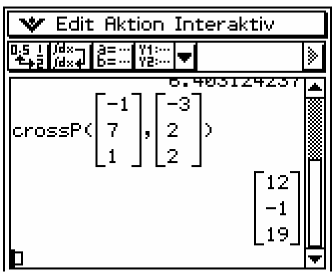
Der Ortsvektor $\vec{q} = \begin{pmatrix}-1\\ 6\\ -2\end{pmatrix}$ besitzt den Betrag $|\vec{q}| \approx 6{,}403$.

Rechnen mit Vektoren

Vektoren können wie Matrizen mit Zahlen multipliziert und bei gleichem Format addiert und subtrahiert werden. Mit dem Menüpunkt Vektor des Aktion-Menüs bzw. des Interaktiv-Menüs lassen sich Skalar- und Vektorprodukte berechnen und weitere Operationen mit Vektoren ausführen.

Um einen Normalenvektor einer Ebene zu erhalten, kann man beispielsweise das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren bilden.

Bestimmung des Vektorproduktes der beiden Richtungsvektoren



Zur Berechnung des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ wählen Sie in der Menüleiste [Aktion ▸ Vektor ▸ crossP]. Dahinter geben Sie den ersten Vektor $\vec{a}$ und den zweiten Vektor $\vec{b}$ durch ein Komma getrennt ein.

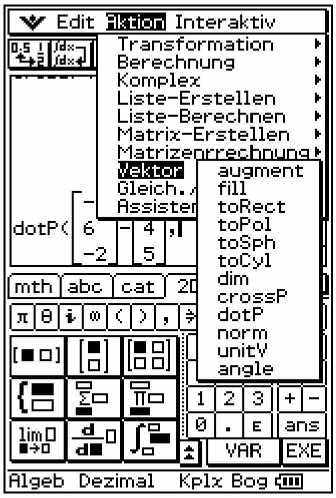
2D [(–)][1][▼][7] [1] [▶] [,]
 [(–)][3][▼][2] [2] [▶] [ )] [EXE]

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\7\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-1\\19\end{pmatrix}$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}12\\-1\\19\end{pmatrix}$ stellt einen Normalenvektor von E dar.

Für den Abstand d des Punktes Q von der Ebene E gilt: $d = \left| (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$

Der „unitV"-Befehl liefert für einen Vektor $\vec{v}$ den normierten Vektor $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

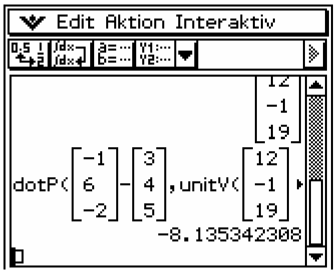


Berechnung des Abstandes von Punkt Q zur Ebene E

Zur Berechnung des Skalarproduktes $(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ wählen Sie in der Menüleiste [Aktion ▸ Vektor ▸ dotP]. Sie geben nun den ersten Faktor $\vec{q} - \vec{p}$ sowie ein Komma ein.

[▯] [(–)][1] [▼] [6] [▯] [(–)][2] [▶] [–]

[▯] [3] [▼] [4] [▯] [5] [▶] [,]

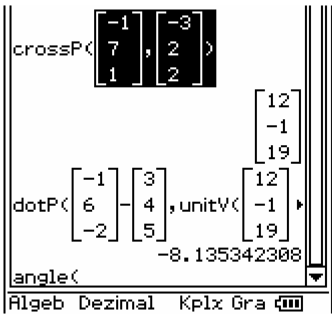


Um den zweiten Faktor $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ einzugeben, wählen Sie in der Menüleiste [Aktion ▸ Vektor ▸ unitV]. Sie markieren den Vektor $\vec{n}$ in der vorigen Ergebniszeile und ziehen ihn hinter die geöffnete Klammer am Ende der neuen Eingabezeile. Mit [ )] [ )] [EXE] beenden Sie die Eingabe.

Der Abstand des Punktes Q zur Ebene E beträgt $d \approx 8{,}135$.

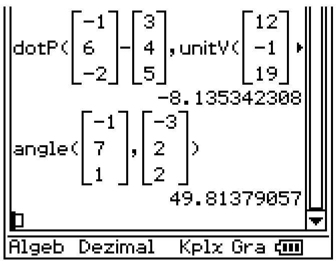
Wechsel in den Gradmodus

Um Winkel bei Ergebnissen im Gradmaß anzeigen zu lassen, tippen Sie in der Ikon-Leiste auf <Settings> und wählen anschließend in der Menüleiste [Setup ▸ Grundformat]. Dort tippen Sie auf den Pfeil [▼] unter der Rubrik Winkel und wählen Grad. Anschließend tippen Sie auf [Einst].



Bestimmung des Winkels zwischen den beiden Richtungsvektoren

Zur Bestimmung des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wählen Sie in der Menüleiste [Aktion ▸ Vektor ▸ angle].
Sie drücken die Taste [Keyboard], um die Software-Tastatur auszublenden. Sie markieren nun in der dritten Eingabezeile die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Komma und der schließenden Klammer und ziehen sie in die neue Eingabezeile hinter die Klammer. Anschließend drücken Sie [EXE].



Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt ca. 49,81°.

Autor: Torsten Gebauer

Übung

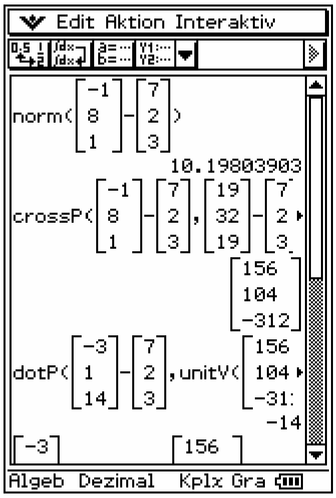
Gegeben seien die Punkte $A(7;\,2;\,3)$, $B(-1;\,8;\,1)$, $C(19;\,32;\,19)$ und $D(-3;\,1;\,14)$.

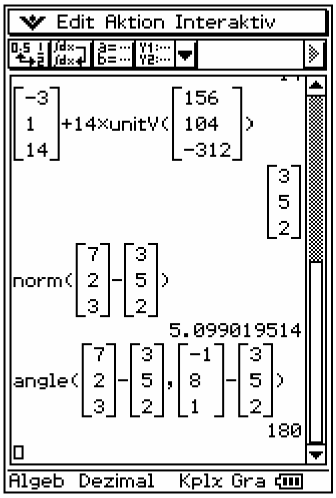
Wie groß ist der Abstand zwischen den Punkten A und B?

E sei die Ebene, welche die Punkte A, B und C enthält.

Bestimmen Sie einen Normalenvektor von E, den Abstand des Punktes D von der Ebene und den Fußpunkt F des Lotes von D auf die Ebene E.

Ermitteln Sie den Betrag des Vektors $\overrightarrow{FA}$ und den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{FA}$ und $\overrightarrow{FB}$.





Autor: Torsten Gebauer